Accessibilité dans les systèmes d'addition de vecteurs à deux compteurs

Michael Blondin

DIRO, Université de Montréal, Canada

LSV, ENS Cachan & CNRS, France

17 février 2015

Reachability in Two-Dimensional Vector Addition Systems with States is PSPACE-complete

Michael Blondin[1,2], Alain Finkel[2], Stefan Göller[2], Christoph Haase[2] & Pierre McKenzie[1,2]

[1]DIRO, Université de Montréal, Canada

[2]LSV, ENS Cachan & CNRS, France

17 février 2015

Problématique: système fonctionne correctement?

Par exemple:

Problématique: système fonctionne correctement?

Par exemple:

- **Système de contrôle d'un ascenseur**

Problématique: système fonctionne correctement?

Par exemple:

- Système de contrôle d'un ascenseur
- **Protocoles cryptographiques**

Problématique: système fonctionne correctement?

Par exemple:

- Système de contrôle d'un ascenseur
- Protocoles cryptographiques
- **Circuits électroniques**

Problématique: système fonctionne correctement?

Par exemple:

- Système de contrôle d'un ascenseur
- Protocoles cryptographiques
- Circuits électroniques
- **Logiciels**

Problématique: système fonctionne correctement?

Par exemple:

- Système de contrôle d'un ascenseur
- Protocoles cryptographiques
- Circuits électroniques
- Logiciels
- etc.

Une solution: vérification formelle

Formalisation des modèles et questions. Par exemple:

Une solution: vérification formelle

Formalisation des modèles et questions. Par exemple:

- **Langage accepté par un automate contient tous les mots *important*s?**

Une solution: vérification formelle

Formalisation des modèles et questions. Par exemple:

- Langage accepté par un automate contient tous les mots *importants*?
- **Exécution infinie dans un automate à compteurs?**

Une solution: vérification formelle

Formalisation des modèles et questions. Par exemple:

- Langage accepté par un automate contient tous les mots *importants*?
- Exécution infinie dans un automate à compteurs?
- **Automate avec horloges peut atteindre une *mauvaise* configuration?**

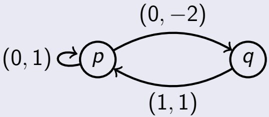
Une solution: vérification formelle

Formalisation des modèles et questions. Par exemple:

- Langage accepté par un automate contient tous les mots *importants*?
- Exécution infinie dans un automate à compteurs?
- Automate avec horloges peut atteindre une *mauvaise* configuration?
- etc.

Système d'addition de vecteurs avec états (VASS)

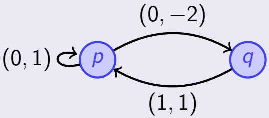
Un *d-VASS* est une paire $V = (Q, T)$



Système d'addition de vecteurs avec états (VASS)

Un *d-VASS* est une paire $V = (Q, T)$ où

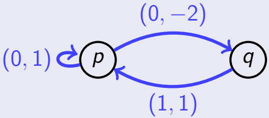
- **Q ensemble fini (*états*)**



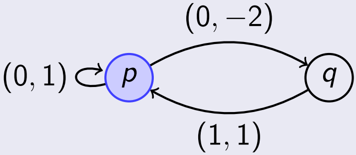
Système d'addition de vecteurs avec états (VASS)

Un *d-VASS* est une paire $V = (Q, T)$ où

- Q ensemble fini (*états*)
- **$T \subseteq Q \times \mathbb{Z}^d \times Q$ fini (*transitions*)**

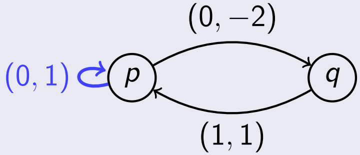


Exécutions



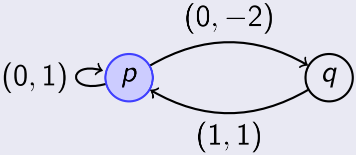
Configuration actuelle: $\boldsymbol{p(0,0)}$

Exécutions



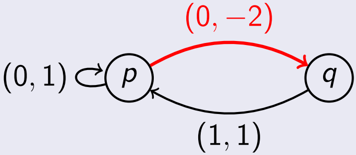
Configuration actuelle: $\boldsymbol{p(0,0)}$

Exécutions



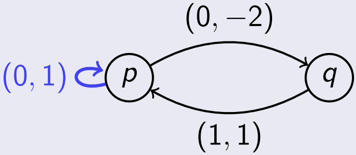
Configuration actuelle: $\boldsymbol{p(0,1)}$

Exécutions



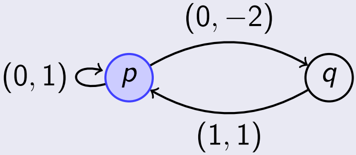
Configuration actuelle: $\boldsymbol{p(0,1)}$

Exécutions



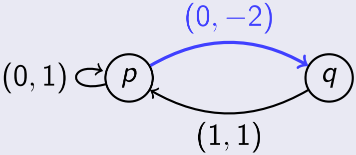
Configuration actuelle: $\boldsymbol{p(0,1)}$

Exécutions



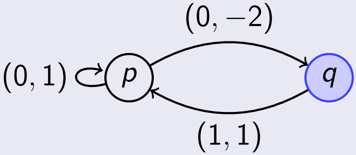
Configuration actuelle: $\boldsymbol{p(0, 2)}$

Exécutions



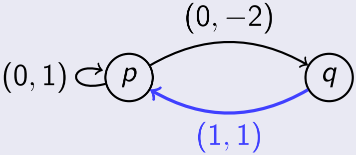
Configuration actuelle: $\boldsymbol{p(0,2)}$

Exécutions



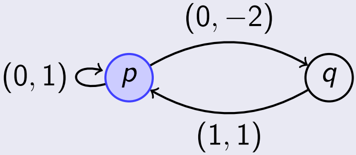
Configuration actuelle: $\boldsymbol{q(0,0)}$

Exécutions



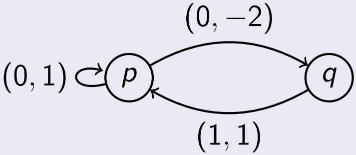
Configuration actuelle: $\boldsymbol{q(0,0)}$

Exécutions



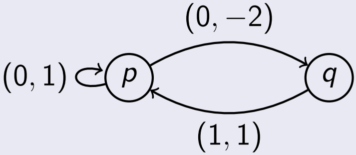
Configuration actuelle: $\boldsymbol{p(1,1)}$

Exécutions



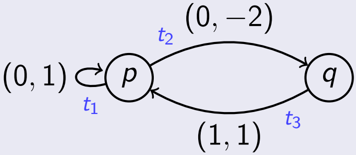
Nous notons $p(\mathbf{u}) \xrightarrow{*} q(\mathbf{v})$ s'il existe exécution de $p(\mathbf{u})$ à $q(\mathbf{v})$

Exécutions



Par exemple, $p(0,0) \xrightarrow{\quad * \quad} p(1,1)$

Exécutions



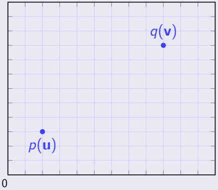
Par exemple, $p(0,0) \xrightarrow{t_1 t_1 t_2 t_3} p(1,1)$

Problème d'accessibilité

Entrée: d-VASS V

Problème d'accessibilité

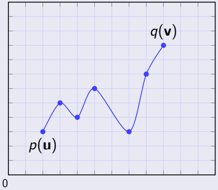
Entrée: d-VASS V et $p(\mathbf{u}), q(\mathbf{v}) \in Q \times \mathbb{N}^d$



Problème d'accessibilité

Entrée: d-VASS V et $p(\mathbf{u}), q(\mathbf{v}) \in Q \times \mathbb{N}^d$

Question: $p(\mathbf{u}) \xrightarrow{*} q(\mathbf{v})$?



Décidabilité du problème d'accessibilité

- **EXPSPACE-ardu: Lipton 1976**

Décidabilité du problème d'accessibilité

- EXPSPACE-ardu: Lipton 1976
- **Preuve partielle (erronnée): Sacerdote & Tenney 1977**

Décidabilité du problème d'accessibilité

- EXPSPACE-ardu: Lipton 1976
- Preuve partielle (erronée): Sacerdote & Tenney 1977
- **Preuve complète: Mayr 1981**

Décidabilité du problème d'accessibilité

- EXPSPACE-ardu: Lipton 1976
- Preuve partielle (erronnée): Sacerdote & Tenney 1977
- Preuve complète: Mayr 1981
- **Simplifications: Kosaraju 1982, Lambert 1992**

Décidabilité du problème d'accessibilité

- EXPSPACE-ardu: Lipton 1976
- Preuve partielle (erronnée): Sacerdote & Tenney 1977
- Preuve complète: Mayr 1981
- Simplifications: Kosaraju 1982, Lambert 1992
- **Nouvelle preuve: Leroux 2009, 2011, 2012**

Décidabilité du problème d'accessibilité

- EXPSPACE-ardu: Lipton 1976
- Preuve partielle (erronnée): Sacerdote & Tenney 1977
- Preuve complète: Mayr 1981
- Simplifications: Kosaraju 1982, Lambert 1992
- Nouvelle preuve: Leroux 2009, 2011, 2012

Livre complet de Reutenauer sur cette preuve

Complexité du problème d'accessibilité

	Nombre de compteurs d		
	1	2	3+
Borne inf.	Décidable	—	—
Borne sup.		Décidable	Décidable

Complexité du problème d'accessibilité

	Nombre de compteurs d		
	1	2	3+
Borne inf.	$\in$ 2-EXPTIME	—	—
Borne sup.		$\in$ 2-EXPTIME	Décidable

[Hopcroft & Pansiot '79
Howell, Rosier, Huynh & Yen '86]

Complexité du problème d'accessibilité

	Nombre de compteurs d		
	1	2	3+
Borne inf.	NP-complet	NP-ardu	NP-ardu
Borne sup.	NP-complet	$\in$ 2-EXPTIME	Décidable

[Haase, Kreutzer, Ouaknine & Worrell '09]

Complexité du problème d'accessibilité

	Nombre de compteurs d		
	1	2	3+
Borne inf.	NP-complet	PSPACE-ardu	PSPACE-ardu
Borne sup.		$\in$ 2-EXPTIME	Décidable

[Fearnley & Jurdziński '13]

Complexité du problème d'accessibilité

	Nombre de compteurs d		
	1	2	3+
Borne inf.	NP-complet	PSPACE-ardu	PSPACE-ardu
Borne sup.		$\in$ PSPACE	Décidable

[B., Finkel, Göller, Haase & McKenzie '14]

Théorème

$\exists c \in \mathbb{N}$

Théorème

$\exists c \in \mathbb{N}, \ \forall$ 2-VASS V

Théorème

$\exists c \in \mathbb{N}, \ \forall$ 2-VASS V

$$p(\mathbf{u}) \xrightarrow{*} q(\mathbf{v})$$

Théorème

$\exists c \in \mathbb{N},\ \forall$ 2-VASS V

$$p(\mathbf{u}) \xrightarrow{*} q(\mathbf{v}) \implies p(\mathbf{u}) \xrightarrow{\pi} q(\mathbf{v}) \text{ où } |\pi| \leq c^{|V|}$$

Théorème

$\exists c \in \mathbb{N}, \ \forall$ 2-VASS V

$$p(\mathbf{u}) \xrightarrow{*} q(\mathbf{v}) \implies p(\mathbf{u}) \xrightarrow{\pi} q(\mathbf{v}) \text{ où } |\pi| \leq c^{|V|}$$

Corollaire

Problème d'accessibilité pour 2-VASS $\in \mathrm{PSPACE}$

Théorème

$\exists c \in \mathbb{N}, \ \forall$ 2-VASS V

$$p(\mathbf{u}) \xrightarrow{*} q(\mathbf{v}) \implies p(\mathbf{u}) \xrightarrow{\pi} q(\mathbf{v}) \text{ où } |\pi| \leq c^{|V|}$$

Esquisse de preuve

(a) **Exécutions mises dans une forme *linéaire***

Théorème

$\exists c \in \mathbb{N}, \ \forall$ 2-VASS V

$$p(\mathbf{u}) \xrightarrow{*} q(\mathbf{v}) \implies p(\mathbf{u}) \xrightarrow{\pi} q(\mathbf{v}) \text{ où } |\pi| \leq c^{|V|}$$

Esquisse de preuve

(a) Exécutions mises dans une forme *linéaire*

(b) **Traduire en système d'inégalités diophantiennes linéaires**

Théorème

$\exists c \in \mathbb{N},\ \ \forall$ 2-VASS V

$$p(\mathbf{u}) \xrightarrow{*} q(\mathbf{v}) \implies p(\mathbf{u}) \xrightarrow{\pi} q(\mathbf{v}) \text{ où } |\pi| \leq c^{|V|}$$

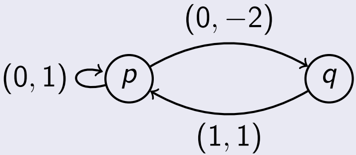
Esquisse de preuve

(a) Exécutions mises dans une forme *linéaire*

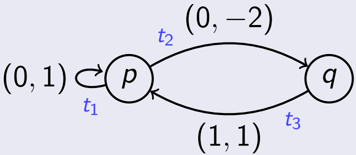
(b) Traduire en système d'inégalités diophantiennes linéaires

(c) **Borner les solutions**

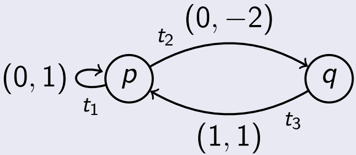
(a) Forme des exécutions



(a) Forme des exécutions

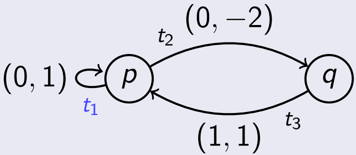


(a) Forme des exécutions



À quoi ressemble une exécution de p vers p?

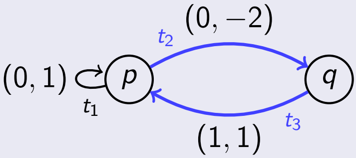
(a) Forme des exécutions



À quoi ressemble une exécution de p vers p?

$t_1{}^*$

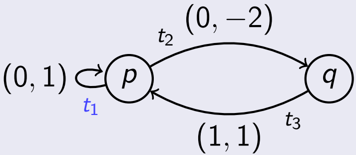
(a) Forme des exécutions



À quoi ressemble une exécution de p vers p?

$$t_1{}^* \; t_2 t_3$$

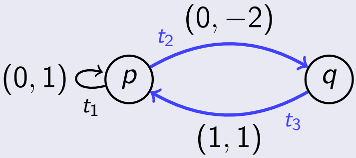
(a) Forme des exécutions



À quoi ressemble une exécution de p vers p?

$$t_1{}^* \ t_2 t_3 \ t_1{}^*$$

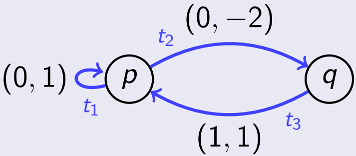
(a) Forme des exécutions



À quoi ressemble une exécution de p vers p?

$$t_1{}^* \; t_2 t_3 \; t_1{}^* \; t_2 t_3$$

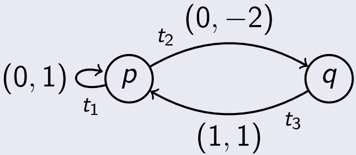
(a) Forme des exécutions



À quoi ressemble une exécution de p vers p?

$$t_1{}^* \; t_2 t_3 \; t_1{}^* \; t_2 t_3 \cdots \; t_1{}^* \; t_2 t_3 \; t_1{}^*$$

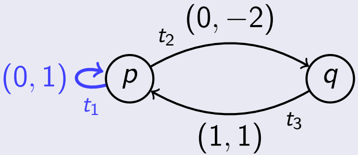
(a) Forme des exécutions



À quoi ressemble une exécution de p vers p?

$$t_1{}^* \; t_2 t_3 \; t_1{}^* \; t_2 t_3 \; \cdots \; t_1{}^* \; t_2 t_3 \; t_1{}^*$$

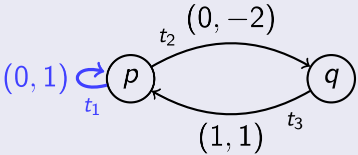
(a) Forme des exécutions



À quoi ressemble une exécution de p vers p?

$$t_1{}^* \ t_2 t_3 \ t_1{}^* \ t_2 t_3 \ \cdots \ t_1{}^* \ t_2 t_3 \ t_1{}^*$$

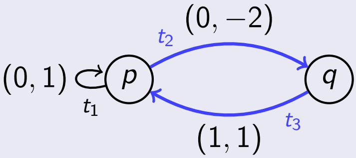
(a) Forme des exécutions



À quoi ressemble une exécution de p vers p?

$$t_1{}^* \ t_2 t_3 \qquad t_2 t_3 \ \cdots \qquad t_2 t_3$$

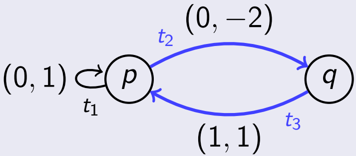
(a) Forme des exécutions



À quoi ressemble une exécution de p vers p?

$$t_1{}^* \quad t_2 t_3 \qquad t_2 t_3 \ \cdots \qquad t_2 t_3$$

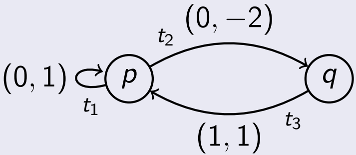
(a) Forme des exécutions



À quoi ressemble une exécution de p vers p?

$$t_1{}^* \; (t_2 t_3)^*$$

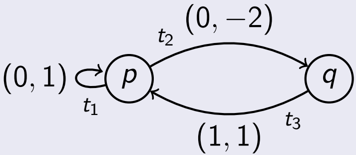
(a) Forme des exécutions



À quoi ressemble une exécution de p vers p?

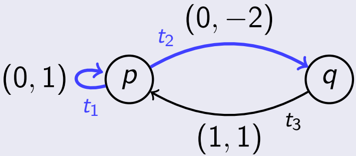
$$t_1{}^* \; (t_2 t_3)^*$$

(a) Forme des exécutions



À quoi ressemble une exécution de p vers q?

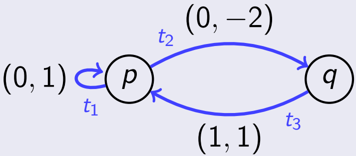
(a) Forme des exécutions



À quoi ressemble une exécution de p vers q?

$t_1{}^* t_2$

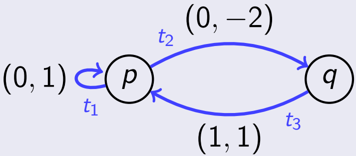
(a) Forme des exécutions



À quoi ressemble une exécution de p vers q?

$t_1{}^* t_2 \; t_3 t_1{}^* t_2$

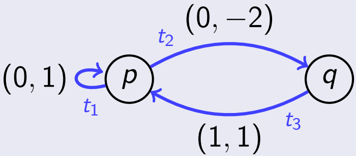
(a) Forme des exécutions



À quoi ressemble une exécution de p vers q?

$${t_1}^* t_2 \;\; t_3 {t_1}^* t_2 \;\; t_3 {t_1}^* t_2$$

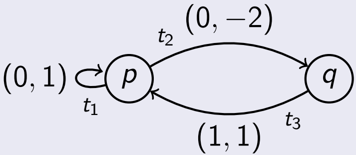
(a) Forme des exécutions



À quoi ressemble une exécution de p vers q?

$$t_1{}^* t_2 \;\; t_3 t_1{}^* t_2 \;\; t_3 t_1{}^* t_2 \;\; \cdots \;\; t_3 t_1{}^* t_2$$

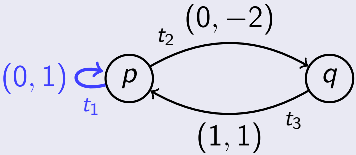
(a) Forme des exécutions



À quoi ressemble une exécution de p vers q?

$$t_1{}^* t_2 \;\; t_3 t_1{}^* t_2 \;\; t_3 t_1{}^* t_2 \;\cdots\; t_3 t_1{}^* t_2$$

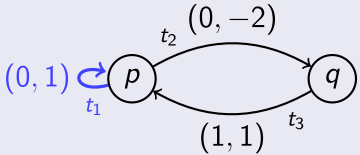
(a) Forme des exécutions



À quoi ressemble une exécution de p vers q?

$$t_1{}^* t_2 \;\; t_3 t_1{}^* t_2 \;\; t_3 t_1{}^* t_2 \;\cdots\; t_3 t_1{}^* t_2$$

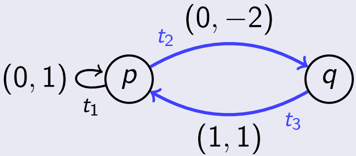
(a) Forme des exécutions



À quoi ressemble une exécution de p vers q?

$$t_1{}^* t_2 \;\; t_3 \quad t_2 \;\; t_3 \quad t_2 \cdots \; t_3 \quad t_2$$

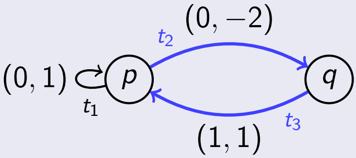
(a) Forme des exécutions



À quoi ressemble une exécution de p vers q?

$${t_1}^* t_2 \; t_3 \quad t_2 \; t_3 \quad t_2 \cdots t_3 \quad t_2$$

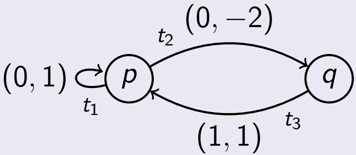
(a) Forme des exécutions



À quoi ressemble une exécution de p vers q?

$$t_1{}^* t_2 (t_3 \ \ t_2)^*$$

(a) Forme des exécutions



À quoi ressemble une exécution de p vers q?

$$t_1{}^* t_2 (t_3 \quad t_2)^*$$

(a) Forme des exécutions

Éxecutions précédentes capturées par langages de la forme:

$$\alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \cdots \beta_k^* \alpha_k \subseteq T^*$$

(a) Forme des exécutions

Éxecutions précédentes capturées par langages de la forme:

$$\alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \cdots \beta_k^* \alpha_k \subseteq T^*$$

Toujours le cas?

(a) Forme des exécutions

Éxecutions précédentes capturées par langages de la forme:

$$\alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \cdots \beta_k^* \alpha_k \subseteq T^*$$

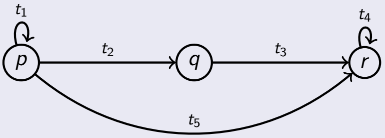
Toujours le cas? Non.

(a) Forme des exécutions

Éxecutions précédentes capturées par langages de la forme:

$$\alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \cdots \beta_k^* \alpha_k \subseteq T^*$$

Toujours le cas? Non.



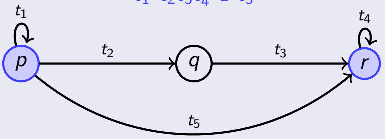
(a) Forme des exécutions

Éxecutions précédentes capturées par langages de la forme:

$$\alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \cdots \beta_k^* \alpha_k \subseteq T^*$$

Toujours le cas? Non.

$t_1{}^* t_2 t_3 t_4^* \cup t_5$



(a) Forme des exécutions

Éxecutions précédentes capturées par langages de la forme:

$$\bigcup_{\text{finie}} \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \cdots \beta_k^* \alpha_k \subseteq T^*$$

(a) Forme des exécutions

Éxecutions précédentes capturées par langages de la forme:

$$\bigcup_{\text{finie}} \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \cdots \beta_k^* \alpha_k \subseteq T^*$$

Toujours le cas?

(a) Forme des exécutions

Éxecutions précédentes capturées par langages de la forme:

$$\bigcup_{\text{finie}} \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \cdots \beta_k^* \alpha_k \subseteq T^*$$

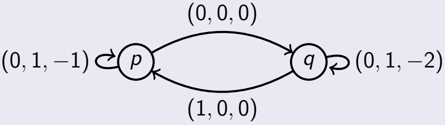
Toujours le cas? Non.

(a) Forme des exécutions

Éxecutions précédentes capturées par langages de la forme:

$$\bigcup_{\text{finie}} \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \cdots \beta_k^* \alpha_k \subseteq T^*$$

Toujours le cas? Non.



[Hopcroft & Pansiot '79]

(a) Forme des exécutions

Exécutions de 1-VASS capturées par *système de chemins linéaires*

$$\bigcup_{\text{finie}} \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \cdots \beta_k^* \alpha_k \subseteq T^*$$

(a) Forme des exécutions

Exécutions de 1-VASS capturées par *système de chemins linéaires*

$$\bigcup_{\text{finie}} \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \cdots \beta_k^* \alpha_k \subseteq T^*$$

[Valiant & Paterson '75]

(a) Forme des exécutions

Exécutions de 2-VASS capturées par *système de chemins linéaires*

$$\bigcup_{\text{finie}} \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \cdots \beta_k^* \alpha_k \subseteq T^*$$

[Leroux & Sutre '02]

(a) Forme des exécutions

Exécutions de 2-VASS capturées par *système de chemins linéaires*

$$\bigcup_{\text{finie}} \underbrace{\alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \cdots \beta_k^* \alpha_k}_{\text{taille chemins? } k?} \subseteq T^*$$

[Leroux & Sutre '02]

(a) Forme des exécutions

Exécutions de 2-VASS capturées par *système de chemins linéaires*

$$\bigcup_{\text{finie}} \underbrace{\alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \cdots \beta_k^* \alpha_k}_{\text{chemins exp., } k \text{ poly.}} \subseteq T^*$$

[B., Finkel, Göller, Haase & McKenzie '14]

(b) Inégalités diophantiennes linéaires

$$p(\mathbf{u}) \xrightarrow{{t_1}^+ \, t_2 \, (t_3 t_4)^+} q(\mathbf{v})?$$

(b) Inégalités diophantiennes linéaires

$$\exists e_1, e_2 > 0 \quad p(\mathbf{u}) \xrightarrow{{t_1}^{e_1}\ t_2\ (t_3 t_4)^{e_2}} q(\mathbf{v})?$$

(b) Inégalités diophantiennes linéaires

$$\exists e_1, e_2 > 0 \quad p(\mathbf{u}) \xrightarrow{{t_1}^{e_1}\ t_2\ (t_3 t_4)^{e_2}} q(\mathbf{v})?$$

$$\Longleftrightarrow$$

(b) Inégalités diophantiennes linéaires

$$\exists e_1, e_2 > 0 \quad p(\mathbf{u}) \xrightarrow{t_1{}^{e_1}\ t_2\ (t_3 t_4)^{e_2}} q(\mathbf{v})?$$

$$\iff$$

$$\mathbf{u} + \quad \delta(t_1) \qquad\qquad \geq \quad \mathbf{0}$$

(b) Inégalités diophantiennes linéaires

$$\exists e_1, e_2 > 0 \quad p(\mathbf{u}) \xrightarrow{t_1{}^{e_1}\ t_2\ (t_3 t_4)^{e_2}} q(\mathbf{v})?$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \quad \delta(t_1) &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{u} + e_1\delta(t_1) &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

(b) Inégalités diophantiennes linéaires

$$\exists e_1, e_2 > 0 \quad p(\mathbf{u}) \xrightarrow{t_1{}^{e_1}\ t_2\ (t_3 t_4)^{e_2}} q(\mathbf{v})?$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} + \delta(t_1) &\geq \mathbf{0}\\
\mathbf{u} + e_1\delta(t_1) &\geq \mathbf{0}\\
\mathbf{u} + e_1\delta(t_1) + \delta(t_2) &\geq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

(b) Inégalités diophantiennes linéaires

$$\exists e_1, e_2 > 0 \quad p(\mathbf{u}) \xrightarrow{t_1{}^{e_1}\ t_2\ (t_3 t_4)^{e_2}} q(\mathbf{v})?$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} + \delta(t_1) &\geq \mathbf{0}\\
\mathbf{u} + e_1\delta(t_1) &\geq \mathbf{0}\\
\mathbf{u} + e_1\delta(t_1) + \delta(t_2) &\geq \mathbf{0}\\
\mathbf{u} + e_1\delta(t_1) + \delta(t_2) + \delta(t_3) &\geq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

(b) Inégalités diophantiennes linéaires

$$\exists e_1, e_2 > 0 \quad p(\mathbf{u}) \xrightarrow{t_1{}^{e_1}\ t_2\ (t_3\,t_4)^{e_2}} q(\mathbf{v})?$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{array}{lcl}
\mathbf{u} + \delta(t_1) & \geq & \mathbf{0} \\
\mathbf{u} + e_1\delta(t_1) & \geq & \mathbf{0} \\
\mathbf{u} + e_1\delta(t_1) + \delta(t_2) & \geq & \mathbf{0} \\
\mathbf{u} + e_1\delta(t_1) + \delta(t_2) + \delta(t_3) & \geq & \mathbf{0} \\
\mathbf{u} + e_1\delta(t_1) + \delta(t_2) + \delta(t_3) + \delta(t_4) & \geq & \mathbf{0}
\end{array}$$

(b) Inégalités diophantiennes linéaires

$$\exists e_1, e_2 > 0 \quad p(\mathbf{u}) \xrightarrow{t_1{}^{e_1}\ t_2\ (t_3\, t_4)^{e_2}} q(\mathbf{v})?$$

$$\iff$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} + \delta(t_1) &\geq \mathbf{0}\\
\mathbf{u} + e_1\delta(t_1) &\geq \mathbf{0}\\
\mathbf{u} + e_1\delta(t_1) + \delta(t_2) &\geq \mathbf{0}\\
\mathbf{u} + e_1\delta(t_1) + \delta(t_2) + \delta(t_3) &\geq \mathbf{0}\\
\mathbf{u} + e_1\delta(t_1) + \delta(t_2) + \delta(t_3) + \delta(t_4) &\geq \mathbf{0}\\
\mathbf{u} + e_1\delta(t_1) + \delta(t_2) + e_2\delta(t_3) + (e_2 - 1)\delta(t_4) &\geq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

(b) Inégalités diophantiennes linéaires

$$\exists e_1, e_2 > 0 \quad p(\mathbf{u}) \xrightarrow{t_1{}^{e_1}\ t_2\ (t_3 t_4)^{e_2}} q(\mathbf{v})?$$

$$\iff$$

$$\begin{array}{lcl}
\mathbf{u} + \delta(t_1) & \geq & \mathbf{0} \\
\mathbf{u} + e_1\delta(t_1) & \geq & \mathbf{0} \\
\mathbf{u} + e_1\delta(t_1) + \delta(t_2) & \geq & \mathbf{0} \\
\mathbf{u} + e_1\delta(t_1) + \delta(t_2) + \delta(t_3) & \geq & \mathbf{0} \\
\mathbf{u} + e_1\delta(t_1) + \delta(t_2) + \delta(t_3) + \delta(t_4) & \geq & \mathbf{0} \\
\mathbf{u} + e_1\delta(t_1) + \delta(t_2) + e_2\delta(t_3) + (e_2 - 1)\delta(t_4) & \geq & \mathbf{0} \\
\mathbf{u} + e_1\delta(t_1) + \delta(t_2) + e_2\delta(t_3) + e_2\delta(t_4) & \geq & \mathbf{0}
\end{array}$$

(b) Inégalités diophantiennes linéaires

$$\exists e_1, e_2 > 0 \quad p(\mathbf{u}) \xrightarrow{t_1{}^{e_1}\ t_2\ (t_3 t_4)^{e_2}} q(\mathbf{v})?$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} + \delta(t_1) &\geq \mathbf{0}\\
\mathbf{u} + e_1\delta(t_1) &\geq \mathbf{0}\\
\mathbf{u} + e_1\delta(t_1) + \delta(t_2) &\geq \mathbf{0}\\
\mathbf{u} + e_1\delta(t_1) + \delta(t_2) + \delta(t_3) &\geq \mathbf{0}\\
\mathbf{u} + e_1\delta(t_1) + \delta(t_2) + \delta(t_3) + \delta(t_4) &\geq \mathbf{0}\\
\mathbf{u} + e_1\delta(t_1) + \delta(t_2) + e_2\delta(t_3) + (e_2 - 1)\delta(t_4) &\geq \mathbf{0}\\
\mathbf{u} + e_1\delta(t_1) + \delta(t_2) + e_2\delta(t_3) + e_2\delta(t_4) &\geq \mathbf{0}\\
\mathbf{u} + e_1\delta(t_1) + \delta(t_2) + e_2\delta(t_3) + e_2\delta(t_4) &= \mathbf{v}
\end{aligned}$$

(c) Taille des solutions

$$\begin{pmatrix} \delta(\beta_1) & 0 & \dots & 0 \\ \delta(\beta_1) & \delta(\beta_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \delta(\beta_1) & \delta(\beta_2) & \dots & \delta(\beta_k) \end{pmatrix} \quad \mathbf{e} \quad \geq \quad \mathbf{c}$$

(c) Taille des solutions

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \delta(\beta_1) & 0 & \dots & 0 \\ \delta(\beta_1) & \delta(\beta_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \delta(\beta_1) & \delta(\beta_2) & \dots & \delta(\beta_k) \end{pmatrix}}_{d \cdot |V|^{O(1)}} \mathbf{e} \geq \mathbf{c}$$

(c) Taille des solutions

$$d \cdot |V|^{O(1)} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} \delta(\beta_1) & 0 & \dots & 0 \\ \delta(\beta_1) & \delta(\beta_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \delta(\beta_1) & \delta(\beta_2) & \dots & \delta(\beta_k) \end{pmatrix}}_{|V|^{O(1)}} \right. \quad \mathbf{e} \quad \geq \quad \mathbf{c}$$

(c) Taille des solutions

$$\begin{pmatrix} \delta(\beta_1) & 0 & \dots & 0 \\ \delta(\beta_1) & \delta(\beta_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \delta(\beta_1) & \delta(\beta_2) & \dots & \delta(\beta_k) \end{pmatrix} \mathbf{e} \geq \|\mathbf{c}\|$$

$$\max\{\|\delta(\alpha_i)\|, \|\delta(\beta_i)\|\} \cdot \quad k \quad \cdot \exp(|V|)$$

(c) Taille des solutions

$$\begin{pmatrix} \delta(\beta_1) & 0 & \dots & 0 \\ \delta(\beta_1) & \delta(\beta_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \delta(\beta_1) & \delta(\beta_2) & \dots & \delta(\beta_k) \end{pmatrix} \mathbf{e} \geq \|\mathbf{c}\|$$

$$\max\{\|\delta(\alpha_i)\|, \|\delta(\beta_i)\|\} \cdot |V|^{O(1)} \cdot \exp(|V|)$$

(c) Taille des solutions

$$\begin{pmatrix} \delta(\beta_1) & 0 & \dots & 0 \\ \delta(\beta_1) & \delta(\beta_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \delta(\beta_1) & \delta(\beta_2) & \dots & \delta(\beta_k) \end{pmatrix} \mathbf{e} \geq \|\mathbf{c}\|$$

$\exp(|V|)$

(c) Taille des solutions

$$\begin{pmatrix} \delta(\beta_1) & 0 & \dots & 0 \\ \delta(\beta_1) & \delta(\beta_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \delta(\beta_1) & \delta(\beta_2) & \dots & \delta(\beta_k) \end{pmatrix} \underbrace{\|\mathbf{e}\|}_{\exp(|V|)} \geq \mathbf{c}$$

(c) Taille des solutions

$$p(\mathbf{u}) \xrightarrow{\qquad * \qquad} q(\mathbf{v})$$

(c) Taille des solutions

$$p(\mathbf{u}) \xrightarrow{\alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \ldots \beta_k^* \alpha_k} q(\mathbf{v})$$

(c) Taille des solutions

$$p(\mathbf{u}) \xrightarrow{\alpha_0 \beta_1^{e_1} \alpha_1 \ldots \beta_k^{e_k} \alpha_k} q(\mathbf{v})$$

(c) Taille des solutions

$$p(\mathbf{u}) \underbrace{\xrightarrow{\alpha_0 \beta_1^{e_1} \alpha_1 \ldots \beta_k^{e_k} \alpha_k}}_{\exp(|V|)} q(\mathbf{v})$$

Systèmes de chemins linéaires

Comment montrer

$$\text{(a) Exécutions} \;\Rightarrow\; a_0\beta_1^*\alpha_1\cdots\beta_k^*\alpha_k \text{ ?}$$

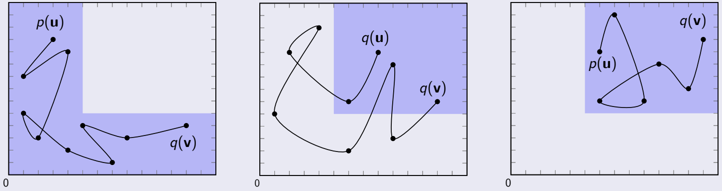
Systèmes de chemins linéaires

Comment montrer $\exists S = \bigcup a_0 \beta_1^* \alpha_1 \cdots \beta_k^* \alpha_k$

$$p(\mathbf{u}) \xrightarrow{*} q(\mathbf{v}) \Leftrightarrow p(\mathbf{u}) \xrightarrow{S} q(\mathbf{v}) \text{ ?}$$

Esquisse de preuve

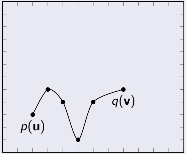
Système de chemins linéaires pour trois types d'exécutions:



Exécutions restreintes

Soit $X \subseteq \mathbb{Z}^d$, alors

$$p(\mathbf{u}) \xrightarrow{\pi}_X q(\mathbf{v})$$

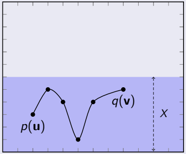


Exécutions restreintes

Soit $X \subseteq \mathbb{Z}^d$, alors

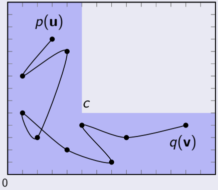
$$p(\mathbf{u}) \xrightarrow{\pi}_X q(\mathbf{v})$$

si l'exécution π demeure dans X



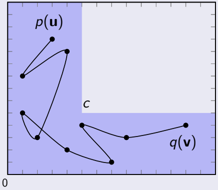
Théorème

$\forall c \in \mathbb{N}$,



Théorème

$\forall c \in \mathbb{N},\ \exists S = \bigcup \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2$

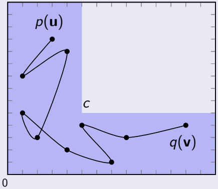


Théorème

$\forall c \in \mathbb{N},\ \exists S = \bigcup \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2$

$$p(\mathbf{u}) \xrightarrow{*}_X q(\mathbf{v}) \iff p(\mathbf{u}) \xrightarrow{S}_X q(\mathbf{v})$$

où $X = ([0, c] \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} \times [0, c])$

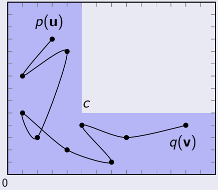


Théorème

$\forall c \in \mathbb{N},\ \exists S = \bigcup \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2$ taille $\leq (|V| + c)^{O(1)}$

$$p(\mathbf{u}) \xrightarrow{*}_X q(\mathbf{v}) \iff p(\mathbf{u}) \xrightarrow{S}_X q(\mathbf{v})$$

où $X = ([0, c] \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} \times [0, c])$



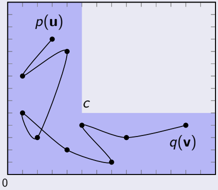
Théorème

$\forall c \in \mathbb{N},\ \exists S = \bigcup \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2$

$$p(\mathbf{u}) \xrightarrow{*}_X q(\mathbf{v}) \iff p(\mathbf{u}) \xrightarrow{S}_X q(\mathbf{v})$$

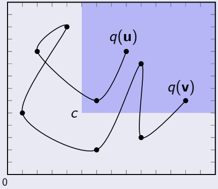
où $X = ([0, c] \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} \times [0, c])$

1-VASS



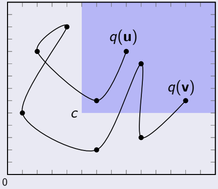
Théorème

$\exists c \leq \exp(|V|)$,



Théorème

$\exists c \leq \exp(|V|),\ \exists S = \bigcup \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2$

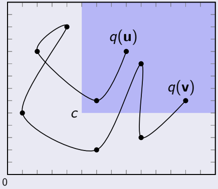


Théorème

$\exists c \leq \exp(|V|),\ \exists S = \bigcup \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2$

$$q(\mathbf{u}) \xrightarrow{*} q(\mathbf{v}) \iff q(\mathbf{u}) \xrightarrow{S} q(\mathbf{v})$$

si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in [c, +\infty)^2$

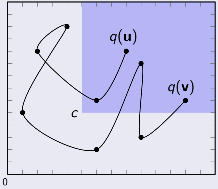


Théorème

$\exists c \leq \exp(|V|),\ \exists S = \bigcup \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2$ —— taille $\leq |V|^{O(1)}$

$$q(\mathbf{u}) \xrightarrow{*} q(\mathbf{v}) \iff q(\mathbf{u}) \xrightarrow{S} q(\mathbf{v})$$

si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in [c, +\infty)^2$



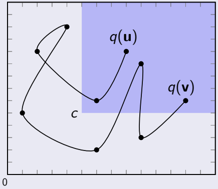
Théorème

$\exists c \leq \exp(|V|),\ \exists S = \bigcup \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \beta_2^* \alpha_2$

$$q(\mathbf{u}) \xrightarrow{*} q(\mathbf{v}) \iff q(\mathbf{u}) \xrightarrow{S} q(\mathbf{v})$$

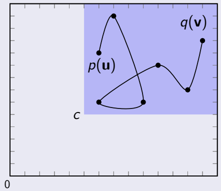
si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in [c, +\infty)^2$

Preuve technique: enlever zig-zags



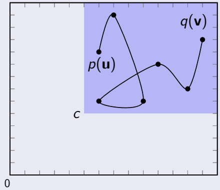
Théorème

$\exists c \leq \exp(|V|)$,



Théorème

$\exists c \leq \exp(|V|),\ \exists S = \bigcup \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \cdots \beta_k^* \alpha_k$

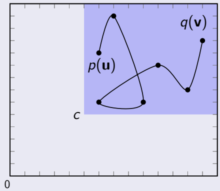


Théorème

$\exists c \leq \exp(|V|),\ \exists S = \bigcup \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \cdots \beta_k^* \alpha_k$

$$p(\mathbf{u}) \xrightarrow{*}_X q(\mathbf{v}) \iff p(\mathbf{u}) \xrightarrow{S}_X q(\mathbf{v})$$

où $X = [c, +\infty)^2$

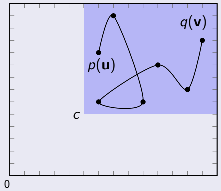


Théorème

$\exists c \leq \exp(|V|),\ \exists S = \bigcup \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \cdots \beta_k^* \alpha_k$ — taille $\leq |V|^{O(1)},\ k \leq 2|Q|$

$$p(\mathbf{u}) \xrightarrow{*}_X q(\mathbf{v}) \iff p(\mathbf{u}) \xrightarrow{S}_X q(\mathbf{v})$$

où $X = [c, +\infty)^2$



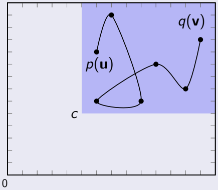
Théorème

$\exists c \leq \exp(|V|),\ \exists S = \bigcup \alpha_0 \beta_1^* \alpha_1 \cdots \beta_k^* \alpha_k$

$$p(\mathbf{u}) \xrightarrow{*}_X q(\mathbf{v}) \iff p(\mathbf{u}) \xrightarrow{S}_X q(\mathbf{v})$$

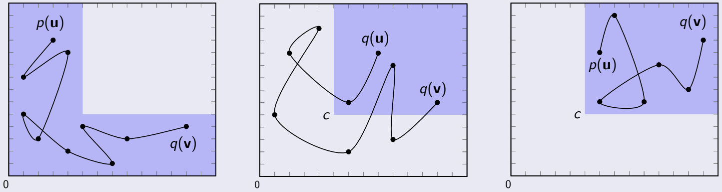
où $X = [c, +\infty)^2$

Combinaisons du cas précédent

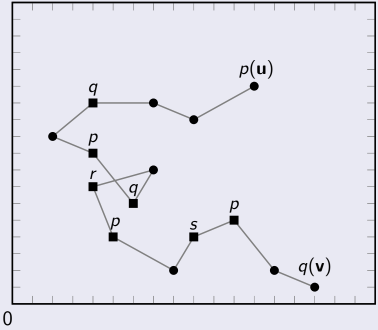


Théorème

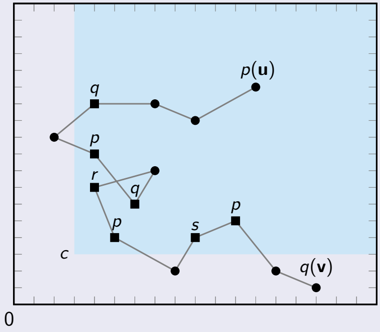
Toute exécution se décompose en $\leq |Q| + 1$ exécutions du type:



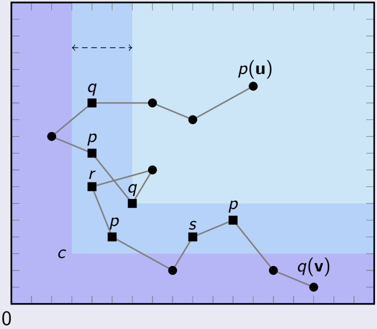
Esquisse de preuve



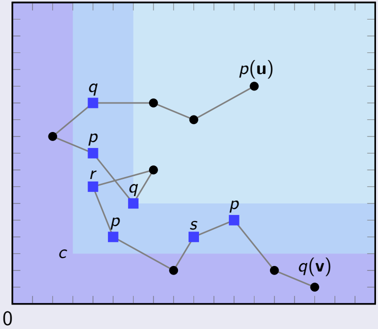
Esquisse de preuve



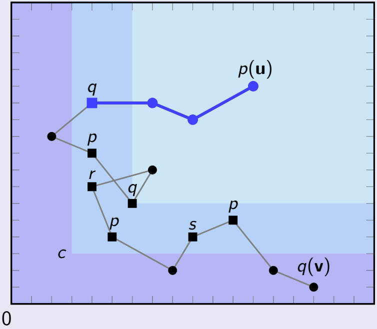
Esquisse de preuve



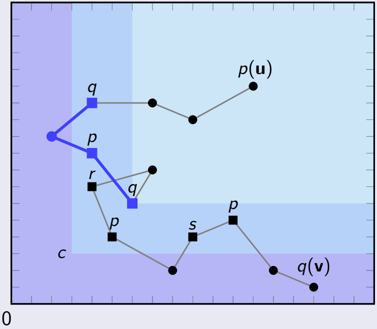
Esquisse de preuve



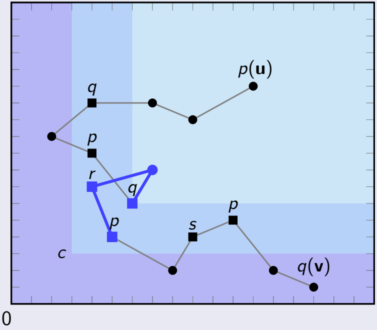
Esquisse de preuve



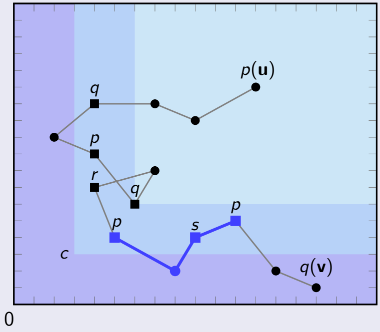
Esquisse de preuve



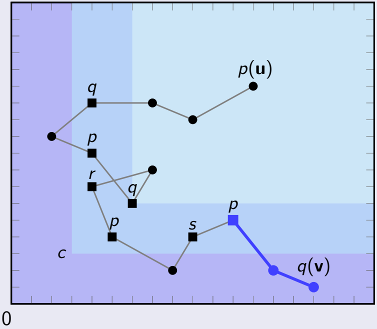
Esquisse de preuve



Esquisse de preuve



Esquisse de preuve



Questions ouvertes

	Nombre de compteurs d		
	1	2	3+
Borne inf.	NP-complet	PSPACE-ardu	PSPACE-ardu
Borne sup.		$\in$ PSPACE	Décidable

Questions ouvertes

	Nombre de compteurs d		
	1	2	3+
Borne inf.	NP-complet	PSPACE-ardu	PSPACE-ardu
Borne sup.		$\in$ PSPACE	Décidable

Questions ouvertes

Si encodé en unaire:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_k \end{pmatrix} \mathbf{x} \geq \mathbf{c}$$

Borne solutions polynomiale plutôt qu'exponentielle?

Merci!