# IFT436 – Algorithmes et structures de données

Université de Sherbrooke

# Devoir 3

| | |
|---|---|
| Enseignant: | Michael Blondin |
| Date de remise: | mardi 14 novembre 2023 à 23h59 |
| À réaliser: | en équipe de deux ou individuellement |
| Modalités: | remettre en ligne sur Turnin dans un fichier PDF |
| Bonus: | les questions bonus sont indiquées par ★ |
| Pointage: | max. 50 points + 3 points bonus |
| Consignes | commentez et décrivez les grandes lignes de vos algorithmes afin de faciliter leur compréhension |

**Question 1.**

(a) Soit $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des pavages, d'une grille $4 \times n$, constitués de tuiles de cette forme (sans rotations):

(i) Donnez une récurrence linéaire $t$ telle que $t(n) = |\mathcal{P}_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Expliquez comment vous avez obtenu votre récurrence. 4 pts

(ii) Appliquez la méthode de résolution de récurrences linéaires présentée en classe afin d'obtenir une forme close pour $t$. Laissez une trace de votre démarche. 5 pts

(iii) Donnez la complexité asymptotique de $t$ aussi précisément que possible avec la notation $\Theta$. Justifiez. 3 pts

(b) Au tout premier cours de la session, nous avons brièvement vu cet algorithme:

**Entrées :** séquence $s$ de $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ entiers
**Sorties :** $\max\{s[i] : 1 \leq i \leq n\}$

```
max-rec(s):
    si n = 1 alors
        retourner s[1]
    sinon
        m  ← max-rec(s[1 : n ÷ 2])
        m' ← max-rec(s[n ÷ 2 + 1 : n])
        si m > m' alors retourner m
        sinon         retourner m'
```

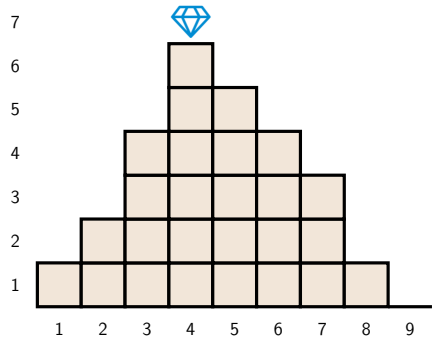
(i) Donnez une récurrence qui décrit le temps d'exécution *exact* de `max-rec` par rapport à $n = |s|$ (donc avec les constantes). Considérez ces opérations comme élémentaires: 4 pts

- comparaison;
- addition;
- division;
- affectation;
- accès au $i^{\text{ème}}$ élément d'une séquence;
- obtention d'une sous-séquence $s[i : j]$ (« *slicing* »).

(ii) L'algorithme `max-rec` est-il plus rapide (asymptotiquement) qu'un algorithme itératif usuel pour le calcul du maximum d'une séquence? Justifiez. Si cela vous aide, vous pouvez supposer que $n$ est une puissance de deux. 4 pts

**Question 2.**

(a) Imaginons un jeu où un diamant se trouve au sommet d'une colline de blocs. Vous devez atteindre le diamant avec un projectile. Vous avez accès à une decription de la colline sous forme d'une séquence $c$ où $c[i] \in \mathbb{N}$ indique le nombre de blocs de la $i^{\text{ème}}$ colonne de la colline. Par exemple, $c = [1, 2, 4, 6, 5, 4, 3, 1, 0]$ décrit cette colline: 10 pts



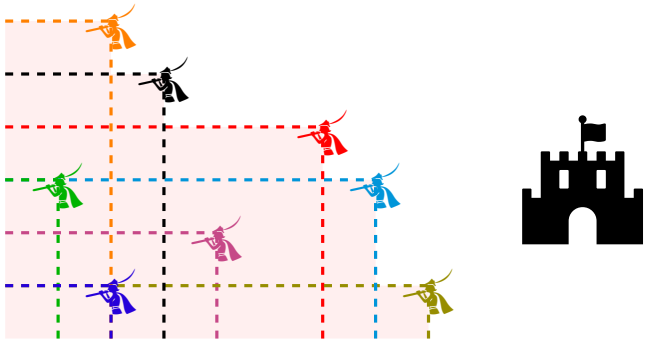

Formellement, une séquence $c$ de $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ nombres naturels forme une *colline* s'il existe $i \in [1..n]$ tel que

$$c[1] < c[2] < \cdots < c[i-1] < c[i] > c[i+1] > \cdots > c[n-1] > c[n].$$

Cet indice $i$ indique la colonne du sommet de $c$. Le diamant se trouve sur le bloc au sommet de la colline, par ex. à la position $(4, 7)$ pour la colline ci-dessus. Vous n'avez qu'un seul projectile et très peu de temps pour le lancer. Donnez donc un algorithme qui résout ce problème en temps $\mathcal{O}(\log n)$:

ENTRÉE: séquence $c$ décrivant une colline de $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ colonnes
SORTIE: position $(i, j)$ du diamant de la colline $c$

(b) Imaginons un jeu où des gardes munis de sarbacanes défendent une forteresse. Chaque garde se situe à une *position* $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ et surveille la région $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : a \leq x \wedge b \leq y\}$. Par exemple, huit gardes aux positions $[(6, 4), (4, 2), (8, 1), (2, 6), (3, 5), (7, 3), (1, 3), (2, 1)]$ surveillent collectivement cette région globale: 10 pts



Vous désirez améliorer votre forteresse, mais n'avez plus de pièce d'or. Vous désirez donc retirer autant de gardes que possible afin d'obtenir des pièces en échange, et ce *sans changer la région globale* surveillée par les gardes. Par exemple, on peut retirer trois gardes au maximum dans le scénario ci-dessus. Donnez donc un algorithme qui résout ce problème en temps $\mathcal{O}(n \log n)$:

ENTRÉE: séquence $p$ des positions des $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gardes
SORTIE: plus grand nombre de gardes qu'on peut retirer de $p$ sans changer la région globale surveillée collectivement

*Indice: divisez le royaume pour régner!*

**Question 3.**

Donnez un algorithme qui résout ce problème en temps $\Theta(n^{\log_3 6})$ dans le pire cas: 10 pts

ENTRÉE: $x \in \mathbb{N}$ représenté avec $n$ chiffres en base $10$
SORTIE: $x^2$

Expliquez pourquoi il fonctionne en temps $\mathcal{O}(n^{\log_3 6})$. Vous n'avez pas à justifier l'appartenance à $\Omega(n^{\log_3 6})$.

*Précision: nous faisons ces hypothèses (comme en classe):*

— *L'addition et la soustraction de deux nombres d'au plus $k$ chiffres s'effectue en temps $\mathcal{O}(k)$;*

— *Le décalage et la troncation de $k$ chiffres d'un nombre s'effectue en temps $\mathcal{O}(k)$.*

*Indice: inspirez-vous de l'algorithme de multiplication rapide vu en classe mais en divisant autrement.*

★ Donnez un algorithme plus efficace pour le cas spécifique d'un nombre $x$ composé d'un seul chiffre répété, par ex. $x = 3333333333$. Plus précisément, donnez un algorithme qui résout ce problème en temps $\mathcal{O}(n)$: ★ 3 pts

ENTRÉE: $x \in \mathbb{N}$ composé d'un seul chiffre en base $10$ répété $n$ fois
SORTIE: $x^2$

Expliquez brièvement le fonctionnement de votre algorithme et pourquoi il s'exécute en temps $\mathcal{O}(n)$.