

IFT436 – Algorithmes et structures de données
Université de Sherbrooke

Examen périodique

Enseignant: Michael Blondin
Date: jeudi 20 octobre 2022
Durée: 110 minutes

Directives:

- Vous devez répondre aux questions dans le **cahier de réponses**, pas sur ce questionnaire;
- **Une seule feuille** de notes au format $8\frac{1}{2}'' \times 11''$ est permise;
- Les **fiches récapitulatives** des chapitres 1 à 4 se trouvent à la fin de ce questionnaire;
- **Aucun matériel additionnel** n'est permis;
- **Aucun appareil électronique** (calculatrice, téléphone, montre intelligente, etc.) n'est permis;
- Vous devez donner **une seule réponse** par sous-question;
- L'examen comporte **4 questions** sur **3 pages** valant un total de **50 points**;
- La correction se base notamment sur la **clarté**, l'**exactitude** et la **concision** de vos réponses, ainsi que sur la **justification** pour les questions qui en requièrent une;
- Si la **base d'un logarithme** n'est pas spécifiée, il s'agit de la base 2: « log » dénote « \log_2 »;
- Les indices d'une séquence **débutent à 1**; autrement dit, $s = [s[1], s[2], \dots, s[n]]$ si $n = |s|$.

Question 1: analyse des algorithmes

(a)

7 pts

(b)

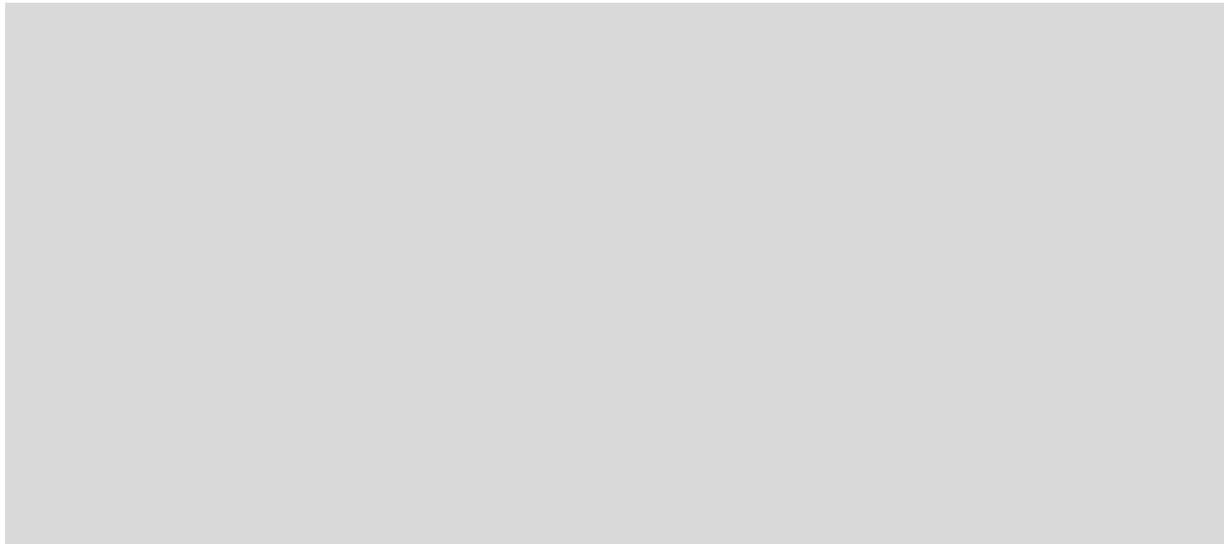
2 pts

(c)

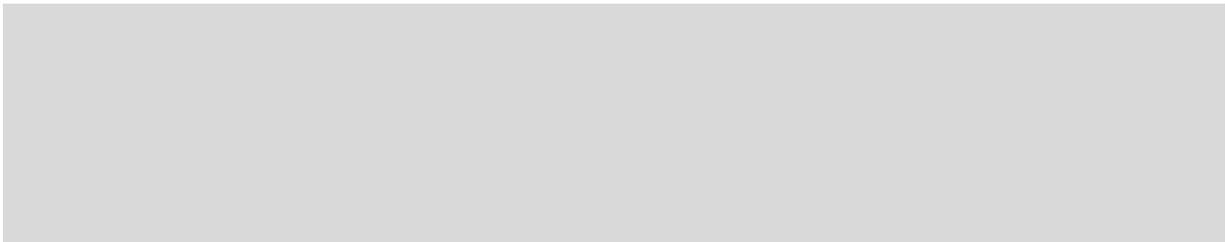
2 pts

(d)

2 pts

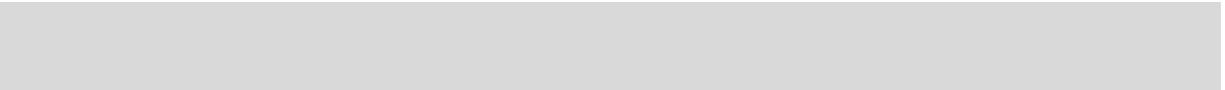
Question 2: tri

(a)  3 pts

(b)  8 pts

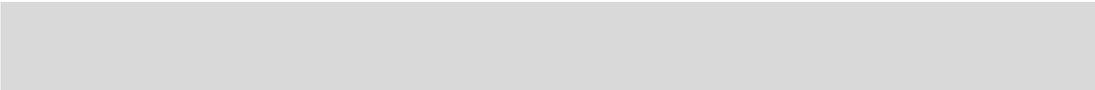
(c)  3 pts

Question 3: graphes

(a) 

(i)  2 pts

(ii)  2 pts

(iii)  2 pts

(b)

7 pts

Question 4: algorithmes gloutons

(a)

3 pts

(b)

3 pts

(c)

(i)

2 pts

(ii)

2 pts

Annexe:

Fiches récapitulatives

1. Analyse des algorithmes

Temps d'exécution

- ▶ *Opérations élémentaires*: dépend du contexte, souvent comparaisons, affectations, arithmétique, accès, etc.
- ▶ *Pire cas* $t_{\max}(n)$: nombre maximum d'opérations élémentaires exécutées parmi les entrées de taille n
- ▶ *Meilleur cas* $t_{\min}(n)$: même chose avec « minimum »
- ▶ $t_{\max}(m, n), t_{\min}(m, n)$: même chose par rapport à m et n

Notation asymptotique

- ▶ *Déf.*: $f \in \mathcal{O}(g)$ si $n \geq n_0 \rightarrow f(n) \leq c \cdot g(n)$ pour certains c, n_0
- ▶ *Signifie*: f croît moins ou aussi rapid. que g pour $n \rightarrow \infty$
- ▶ *Transitivité*: $f \in \mathcal{O}(g)$ et $g \in \mathcal{O}(h) \rightarrow f \in \mathcal{O}(h)$
- ▶ *Règle des coeff.*: $f_1 + \dots + f_k \in \mathcal{O}(c_1 \cdot f_1 + \dots + c_k \cdot f_k)$
- ▶ *Règle du max.*: $f_1 + \dots + f_k \in \mathcal{O}(\max(f_1, \dots, f_k))$
- ▶ *Déf.*: $f \in \Omega(g) \leftrightarrow g \in \mathcal{O}(f)$; $f \in \Theta(g) \leftrightarrow f \in \mathcal{O}(g) \cap \Omega(g)$
- ▶ *Règle des poly.*: f polynôme de degré $d \rightarrow f \in \Theta(n^d)$

Notation asymptotique (suite)

- ▶ *Simplification*: lignes élem. comptées comme une seule opér.

- ▶ *Règle de la limite*:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \begin{cases} 0 & f \in \mathcal{O}(g) \text{ et } g \notin \mathcal{O}(f) \\ +\infty & f \notin \mathcal{O}(g) \text{ et } g \in \mathcal{O}(f) \\ \text{const.} & \Theta(f) = \Theta(g) \end{cases}$$

- ▶ *Multi-params.*: $\mathcal{O}, \Omega, \Theta$ étendues avec plusieurs seuils

Correction et terminaison

- ▶ *Correct*: sur toute entrée x qui satisfait la pré-condition, x et sa sortie y satisfont la post-condition
- ▶ *Termine*: atteint instruction **retourner** sur toute entrée
- ▶ *Invariant*: propriété qui demeure vraie à chaque fois qu'une ou certaines lignes de code sont atteintes

Exemples de complexité

$$\mathcal{O}(1) \subset \mathcal{O}(\log n) \subset \mathcal{O}(n) \subset \mathcal{O}(n \log n) \subset \mathcal{O}(n^2) \subset \mathcal{O}(n^2 \log n) \\ \subset \mathcal{O}(n^3) \subset \mathcal{O}(n^d) \subset \mathcal{O}(2^n) \subset \mathcal{O}(3^n) \subset \mathcal{O}(b^n) \subset \mathcal{O}(n!)$$

2. Tri

Approche générique

- ▶ *Inversion*: indices (i, j) t.q. $i < j$ et $s[i] > s[j]$
- ▶ *Progrès*: corriger une inversion en diminue la quantité
- ▶ *Procédure*: sélectionner et corriger une inversion, jusqu'à ce qu'il n'en reste plus

Algorithmes (par comparaison)

- ▶ *Insertion*: considérer $s[1 : i-1]$ triée et insérer $s[i]$ dans $s[1 : i]$
- ▶ *Monceau*: transformer s en monceau et retirer ses éléments
- ▶ *Fusion*: découper s en deux, trier chaque côté et fusionner
- ▶ *Rapide*: réordonner autour d'un pivot et trier chaque côté

Propriétés

- ▶ *Sur place*: n'utilise pas de séquence auxiliaire
- ▶ *Stable*: l'ordre relatif des éléments égaux est préservé

Sommaire

Algorithme	Complexité (par cas)			Sur place	Stable
	meilleur	moyen	pire		
insertion	$\Theta(n)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	✓	✓
monceau	$\Theta(n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	✓	✗
fusion	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	✗	✓
rapide	$\Theta(n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n^2)$	✓	✗

Usage

- ▶ *Petite taille*: tri par insertion
- ▶ *Grande taille*: tri par monceau ou tri rapide
- ▶ *Grande taille + stabilité*: tri par fusion

Tri sans comparaison

- ▶ *Par comparaison*: barrière théorique de $\Omega(n \log n)$
- ▶ *Sans comparaison*: possible de faire mieux pour certains cas
- ▶ *Représentation binaire*: trier (de façon stable) en ordonnant du bit de poids faible vers le bit de poids fort
- ▶ *Complexité*: $\Theta(mn)$ où m = nombre de bits et $n = |s|$

3. Graphes

Graphes

- ▶ **Graphe:** $\mathcal{G} = (V, E)$ où $V =$ sommets et $E =$ arêtes
- ▶ **Dirigé vs. non dirigé:** $\{u, v\} \in E$ vs. $(u, v) \in E$
- ▶ **Degré (cas non dirigé):** $\text{deg}(u) = \#$ de voisins
- ▶ **Degré (cas dirigé):** $\text{deg}^-(u) = \#$ préd., $\text{deg}^+(u) = \#$ succ.
- ▶ **Taille:** $|E| \in \Theta(\text{somme des degrés})$ et $|E| \in \mathcal{O}(|V|^2)$
- ▶ **Chemin:** séq. $u_0 \rightarrow \dots \rightarrow u_k$ (taille = k , simple si sans rép.)
- ▶ **Cycle:** chemin de u vers u (simple si sans rép. sauf début/fin)
- ▶ **Sous-graphe:** obtenu en retirant sommets et/ou arêtes
- ▶ **Composante:** sous-graphe max. où sommets access. entre eux

Parcours

- ▶ **Profondeur:** explorer le plus loin possible, puis retour (pile)
- ▶ **Largeur:** explorer successeurs, puis leurs succ., etc. (file)
- ▶ **Temps d'exécution:** $\mathcal{O}(|V| + |E|)$

Représentation

		Mat.	Liste (non dirigé)	Liste (dir.)
$u \rightarrow v?$		$\Theta(1)$	$\mathcal{O}(\min(\text{deg}(u), \text{deg}(v)))$	$\mathcal{O}(\text{deg}^+(u))$
$a \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$[a \mapsto [b, c],$	$\Theta(V)$	$\mathcal{O}(\text{deg}(u))$	$\mathcal{O}(\text{deg}^+(u))$
	$b \mapsto [a],$	$\Theta(V)$	$\mathcal{O}(\text{deg}(v))$	$\mathcal{O}(V + E)$
	$c \mapsto [b]$	$\Theta(1)$	$\mathcal{O}(\text{deg}(u) + \text{deg}(v))$	$\mathcal{O}(\text{deg}^+(u))$
		Mémoire	$\Theta(V ^2)$	$\Theta(V + E)$

Propriétés et algorithmes

- ▶ **Plus court chemin:** parcours en largeur + stocker préd.
- ▶ **Ordre topologique:** $u_1 \preceq \dots \preceq u_n$ où $i < j \implies (u_j, u_i) \notin E$
- ▶ **Tri topologique:** mettre sommets de degré 0 en file, retirer en mettant les degrés à jour, répéter tant que possible
- ▶ **Détec. de cycle:** tri topo. + vérifier si contient tous sommets
- ▶ **Temps d'exécution:** tous linéaires

Arbres

- ▶ **Arbre:** graphe connexe et acyclique (ou prop. équivalentes)
- ▶ **Forêt:** graphe constitué de plusieurs arbres
- ▶ **Arbre couv.:** arbre avec tous sommets d'un graphe \mathcal{G} non dirigé; possible ssi \mathcal{G} connexe; se trouve avec parcours en prof.

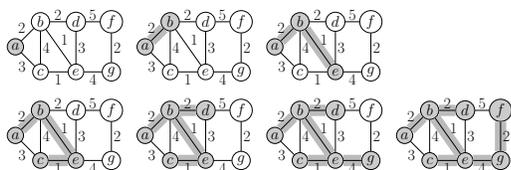
4. Algorithmes gloutons

Arbres couvrants minimaux

- ▶ **Graphe pondéré:** $\mathcal{G} = (V, E)$ où $p[e]$ est le poids de l'arête e
- ▶ **Poids d'un graphe:** $p(\mathcal{G}) = \sum_{e \in E} p[e]$
- ▶ **Arbre couv. min.:** arbre couvrant de \mathcal{G} de poids minimal

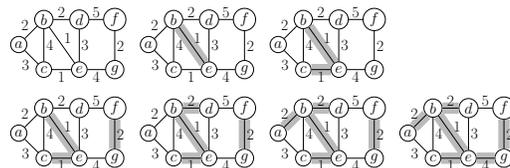
Algorithme de Prim-Jarník

- ▶ **Approche:** faire grandir un arbre en prenant l'arête min.
- ▶ **Complexité:** $\mathcal{O}(|E| \log |V|)$ avec monceau



Algorithme de Kruskal

- ▶ **Approche:** connecter forêt avec l'arête min. jusqu'à un arbre
- ▶ **Complexité:** $\mathcal{O}(|E| \log |V|)$ avec ensembles disjoints



Ensembles disjoints

- ▶ **But:** manipuler une partition d'un ensemble V
- ▶ **Représentation:** chaque ensemble sous une arborescence

Algorithme glouton

- 1) Choisir un candidat c itérativement (sans reconsidérer)
- 2) Ajouter c à solution partielle S si admissible
- 3) Retourner S si solution (complète), « impossible » sinon

Problème du sac à dos

- ▶ **But:** choisir objets pour maxim. valeur sans excéder capacité
- ▶ **Algo. glouton:** trier en ordre décroissant par $val[i]/poids[i]$
- ▶ **Fonctionne** si on peut découper objets (sinon approx. à 1/2)