

IFT436 – Algorithmes et structures de données

Université de Sherbrooke

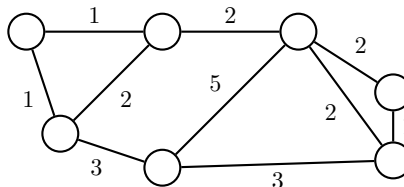
Devoir 3

Enseignant: Michael Blondin
 Date de remise: mercredi 13 octobre 2021 à 23h59
 À réaliser: en équipe de deux ou individuellement
 Modalités: remettre en ligne sur **Turnin** dans un fichier PDF
 Bonus: les questions bonus sont indiquées par ★
 Pointage: max. 15 points + 1,5 points bonus

Question 1.

Une entrepreneure compte aménager un site de glamping écoresponsable de n gîtes dans les Cantons-de-l'Est, où n sera déterminé selon la subvention accordée par le Ministère du Tourisme. Afin d'accommoder le plus grand nombre de personnes, l'entrepreneure désire qu'on puisse se déplacer de chaque gîte vers chaque autre gîte à partir de chemins pavés. Elle vous embauche donc afin de l'épauler dans la conception du site.

- (a) Étant donné des chemins pavés, on vous demande de vérifier rapidement s'il y a un chemin entre chaque paire de gîtes, mais pas de chemin superflu. Autrement dit, **donnez un algorithme qui détermine si un graphe non dirigé est un arbre**. Expliquez brièvement pourquoi l'algorithme fonctionne, et analysez son temps d'exécution. Votre algorithme doit fonctionner en temps $O(n)$ dans le pire cas, où n est le nombre de sommets. Considérez l'entrée comme un graphe représenté par une liste d'adjacence. 4 pts
- (b) L'entrepreneure aimerait minimiser le pavage du réseau de sentiers. Vous désirez la convaincre qu'il peut être préférable d'ajouter une halte entre les gîtes. Plus formellement, considérez les gîtes comme n points dans le plan, et un chemin entre deux gîtes comme une droite dont la longueur correspond à la distance euclidienne entre les deux points. **Donnez un exemple de points où un arbre couvrant minimal entre ces points est plus long qu'un arbre couvrant minimal avec un nouveau point ajouté (une halte)**. Choisissez le nombre de gîtes, ainsi que leur position et celle de la halte. Justifiez. 3 pts
- (c) Le réseau de sentiers ci-dessous est finalement retenu. Quelle sera la longueur du sous-réseau pavé? Autrement dit, **quel est le poids d'un arbre couvrant minimal? Justifiez en exécutant graphiquement l'algorithme de Prim-Jarník, puis de Kruskal**. Dites s'il y a plus d'une façon d'obtenir ce poids. 4 pts



- (d) Afin d'obtenir la subvention, le ministère requiert qu'il soit facile d'accéder à un téléphone d'urgence. Informellement, un téléphone doit nécessairement se trouver à au plus un sentier (pavé ou non) de chaque gîte. Formellement, chaque gîte u doit satisfaire cette condition: u est équipé d'un téléphone, ou tous les gîtes $\{v : u \rightarrow v\}$ possèdent un téléphone. **L'algorithme glouton suivant est-il correct? Justifiez.** 4 pts

Entrées : un graphe non dirigé $\mathcal{G} = (V, E)$

Sorties : la plus petite quantité de téléphones à installer pour obtenir une subvention

$T \leftarrow [v \mapsto \text{faux} : v \in V]; c \leftarrow 0$

tant que V est non vide **faire**

retirer un sommet x de V

si $\neg T[x]$ et $(\neg T[y]$ pour au moins une certaine arête $(x, y) \in E$) **alors** $T[x] \leftarrow \text{vrai}; c \leftarrow c + 1$

retourner c

★ Donnez un algorithme qui résout le problème suivant en temps $\mathcal{O}(k)$:

★ 1,5 pts

ENTRÉE: une forêt $\mathcal{F} = (V, E)$ sous forme de liste d'adjacence, et un entier $1 \leq k < |V|$,
tels que $\deg(v) > 0$ pour tout $v \in V$

SORTIE: $\mathcal{F}$ contient-elle au moins $|V| - k$ arbres?

Considérez l'arithmétique, ainsi que ces opérations sur les séquences, comme élémentaires: l'ajout, l'accès, et l'obtention de la taille. Analysez le temps d'exécution de l'algorithme et expliquez pourquoi il est correct.