

1. Analyse des algorithmes

Temps d'exécution

- *Opérations élémentaires*: dépend du contexte, souvent comparaisons, affectations, arithmétique, accès, etc.
- *Pire cas* $t_{\max}(n)$: nombre maximum d'opérations élémentaires exécutées parmi les entrées de taille n
- *Meilleur cas* $t_{\min}(n)$: même chose avec « minimum »
- $t_{\max}(m, n)$, $t_{\min}(m, n)$: même chose par rapport à m et n

Notation asymptotique

- *Déf.*: $f \in \mathcal{O}(g)$ si $n \geq n_0 \rightarrow f(n) \leq cg(n)$ pour certains c, n_0
- *Signifie*: f croît moins ou aussi rapid. que g pour $n \rightarrow \infty$
- *Transitivité*: $f \in \mathcal{O}(g)$ et $g \in \mathcal{O}(h) \rightarrow f \in \mathcal{O}(h)$
- *Règle des coeff.*: $f_1 + \dots + f_k \in \mathcal{O}(c_1 \cdot f_1 + \dots + c_k \cdot f_k)$
- *Règle du max.*: $f_1 + \dots + f_k \in \mathcal{O}(\max(f_1, \dots, f_k))$
- *Déf.*: $f \in \Omega(g) \leftrightarrow g \in \mathcal{O}(f)$; $f \in \Theta(g) \leftrightarrow f \in \mathcal{O}(g) \cap \Omega(g)$
- *Règle des poly.*: f polynôme de degré $d \rightarrow f \in \Theta(n^d)$

Notation asymptotique (suite)

- *Simplification*: lignes elem. comptées comme une seule opér.
- *Règle de la limite*:
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \begin{cases} 0 & f \in \mathcal{O}(g) \text{ et } g \notin \mathcal{O}(f) \\ +\infty & f \notin \mathcal{O}(g) \text{ et } g \in \mathcal{O}(f) \\ \text{const.} & \Theta(f) = \Theta(g) \end{cases}$$
- *Multi-params.*: $\mathcal{O}, \Omega, \Theta$ étendues avec plusieurs seuils

Correction et terminaison

- *Correct*: sur toute entrée x qui satisfait la pré-condition, x et sa sortie y satisfont la post-condition
- *Termine*: atteint instruction **retourner** sur toute entrée
- *Invariant*: propriété qui demeure vraie à chaque fois qu'une ou certaines lignes de code sont atteintes

Exemples de complexité

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(1) &\subset \mathcal{O}(\log n) \subset \mathcal{O}(n) \subset \mathcal{O}(n \log n) \subset \mathcal{O}(n^2) \subset \mathcal{O}(n^2 \log n) \\ &\subset \mathcal{O}(n^3) \subset \mathcal{O}(n^d) \subset \mathcal{O}(2^n) \subset \mathcal{O}(3^n) \subset \mathcal{O}(b^n) \subset \mathcal{O}(n!) \end{aligned}$$

2. Tri

Approche générique

- *Inversion*: indices (i, j) t.q. $i < j$ et $s[i] > s[j]$
- *Progrès*: corriger une inversion en diminue la quantité
- *Procédure*: sélectionner et corriger une inversion, jusqu'à ce qu'il n'en reste plus

Algorithmes (par comparaison)

- *Insertion*: considérer $s[1:i-1]$ triée et insérer $s[i]$ dans $s[1:i]$
- *Monceau*: transformer s en monceau et retirer ses éléments
- *Fusion*: découper s en deux, trier chaque côté et fusionner
- *Rapide*: réordonner autour d'un pivot et trier chaque côté

Propriétés

- *Sur place*: n'utilise pas de séquence auxiliaire
- *Stable*: l'ordre relatif des éléments égaux est préservé

Sommaire

Algorithme	Complexité (par cas)			Sur place	Stable
	meilleur	moyen	pire		
insertion	$\Theta(n)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	✓	✓
monceau	$\Theta(n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	✓	✗
fusion	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	✗	✓
rapide	$\Theta(n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n^2)$	✓	✗

Usage

- *Petite taille*: tri par insertion
- *Grande taille*: tri par monceau ou tri rapide
- *Grande taille + stabilité*: tri par fusion

Tri sans comparaison

- *Par comparaison*: barrière théorique de $\Omega(n \log n)$
- *Sans comparaison*: possible de faire mieux pour certains cas
- *Représentation binaire*: trier en ordonnant du bit de poids faible vers le bit de poids fort
- *Complexité*: $\Theta(mn)$ où m = nombre de bits et $n = |s|$

3. Graphes

Graphes

- *Graphe*: $\mathcal{G} = (V, E)$ où V = sommets et E = arêtes
- *Dirigé vs. non dirigé*: $\{u, v\} \in E$ vs. $(u, v) \in E$
- *Degré (cas non dirigé)*: $\deg(u) = \#$ de voisins
- *Degré (cas dirigé)*: $\deg^-(u) = \#$ préd., $\deg^+(u) = \#$ succ.
- *Taille*: $|E| \in \Theta(\text{somme des degrés})$ et $|E| \in \mathcal{O}(|V|^2)$
- *Chemin*: séq. $u_0 \rightarrow \dots \rightarrow u_k$ (taille = k , simple si sans rép.)
- *Cycle*: chemin de u vers u (simple si sans rép. sauf début/fin)
- *Sous-graphe*: obtenu en retirant sommets et/ou arêtes
- *Composante*: sous-graphe max. où sommets access. entre eux

Parcours

- *Profondeur*: explorer le plus loin possible, puis retour (pile)
- *Largeur*: explorer successeurs, puis leurs succ., etc. (file)
- *Temps d'exécution*: $\mathcal{O}(|V| + |E|)$

Représentation

		Mat.	Liste (non dirigé)	Liste (dir.)
	$u \rightarrow v?$	$\Theta(1)$	$\mathcal{O}(\min(\deg(u), \deg(v)))$	$\mathcal{O}(\deg^+(u))$
$a \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$a \mapsto [b, c],$	$\Theta(V)$	$\mathcal{O}(\deg(u))$	$\mathcal{O}(\deg^+(u))$
	$b \mapsto [a],$	$\Theta(V)$	$\mathcal{O}(\deg(v))$	$\mathcal{O}(V + E)$
	$c \mapsto [b]$	Modif. $u \rightarrow v$ Mémoire	$\Theta(1)$ $\Theta(V ^2)$	$\mathcal{O}(\deg(u) + \deg(v))$ $\Theta(V + E)$

Propriétés et algorithmes

- *Plus court chemin*: parcours en largeur + stocker préd.
- *Ordre topologique*: $u_1 \preceq \dots \preceq u_n$ où $i < j \implies (u_j, u_i) \notin E$
- *Tri topologique*: mettre sommets de degré 0 en file, retirer en mettant les degrés à jour, répéter tant que possible
- *Détéc. de cycle*: tri topo. + vérifier si contient tous sommets
- *Temps d'exécution*: tous linéaires

Arbres

- *Arbre*: graphe connexe et acyclique (ou prop. équivalentes)
- *Forêt*: graphe constitué de plusieurs arbres
- *Arbre couv.*: arbre qui contient tous les sommets d'un graphe

4. Algorithmes gloutons

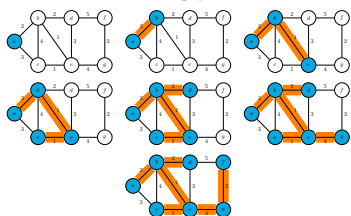
Arbres couvrants minimaux

- *Graphe pondéré*: $\mathcal{G} = (V, E)$ où $p[e]$ est le poids de l'arête e
- *Poids d'un graphe*: $p(\mathcal{G}) = \sum_{e \in E} p[e]$
- *Arbre couv. min.*: arbre couvrant de $\mathcal{G}$ de poids minimal

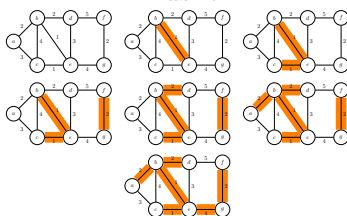
Algorithmes

- *Prim-Jarník*: faire grandir un arbre en prenant l'arête min.
- *Complexité*: $\mathcal{O}(|E| \log |V|)$ avec monceau
- *Kruskal*: connecter forêt avec l'arête min. jusqu'à un arbre
- *Complexité*: $\mathcal{O}(|E| \log |V|)$ avec ensembles disjoints

Prim-Jarník



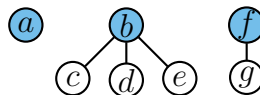
Kruskal



Ensembles disjoints

- *But*: manipuler une partition d'un ensemble V
- *Représentation*: chaque ensemble sous une arborescence

$\{a\} \quad \{b, c, d, e\} \quad \{f, g\}$



init(V)	$\Theta(V)$
trouver(v)	$\mathcal{O}(\log V)$
union(u, v)	$\mathcal{O}(\log V)$

Algorithme glouton

- 1) Choisir un candidat c itérativement (*sans reconsidérer*)
- 2) Ajouter c à solution partielle S si *admissible*
- 3) Retourner S si *solution (complète)*, « impossible » sinon

Problème du sac à dos

- *But*: choisir objets pour maxim. valeur sans excéder capacité
- *Algo. glouton*: trier en ordre décroissant par $val[i]/poids[i]$
- *Fonctionne* seulement si on peut découper objets
- *Approxime* solution discrète à facteur $1/2$

5. Algorithmes récursifs et approche diviser-pour-régner

Diviser-pour-régner

- ▶ A) découper en sous-problèmes disjoints
- ▶ B) obtenir solutions récursivement
- ▶ C) s'arrêter aux cas de base (souvent triviaux)
- ▶ D) combiner solutions pour obtenir solution globale
- ▶ Exemple: tri par fusion $\mathcal{O}(n \log n)$

Réurrences linéaires

- ▶ Cas homogène: $\sum_{i=0}^d a_i \cdot t(n-i) = 0$
- ▶ Polynôme caractéristique: $\sum_{i=0}^d a_i \cdot x^{d-i}$
- ▶ Forme close: $t(n) = \sum_{i=1}^d c_i \cdot \lambda_i^n$ où les λ_i sont les racines
- ▶ Constantes c_i : obtenues en résolvant un sys. d'éq. lin.
- ▶ Cas non homo.: si $= c \cdot b^n$, on multiplie poly. par $(x - b)$
- ▶ Exemple:
 - Récurrence: $t(n) = 3 \cdot t(n-1) + 4 \cdot t(n-2)$
 - Poly. carac.: $x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1)$
 - Forme close: $t(n) = c_1 \cdot 4^n + c_2 \cdot (-1)^n$

Autres méthodes

- ▶ Substitution: remplacer $t(n), t(n-1), t(n-2), \dots$ par sa déf. jusqu'à deviner la forme close
- ▶ Arbres: construire un arbre représentant la récursion et identifier le coût de chaque niveau

Quelques algorithmes

- ▶ Hanoi: $src[1:n-1] \rightarrow tmp, src[n] \rightarrow dst, tmp[1:n-1] \rightarrow dst \quad \mathcal{O}(2^n)$
- ▶ Exp. rapide: exploiter $b^n = (b^{n \div 2})^2 \cdot b^{n \bmod 2} \quad \mathcal{O}(\log n)$
- ▶ Mult. rapide: calculer $(a+b)(c+d)$ en 3 mult. $\mathcal{O}(n^{\log 3})$
- ▶ Horizon: découper blocs comme tri par fusion $\mathcal{O}(n \log n)$

Théorème maître (allégé)

- ▶ $t(n) = c \cdot t(n \div b) + f(n)$ où $f \in \mathcal{O}(n^d)$:
 - $\mathcal{O}(n^d)$ si $c < b^d$
 - $\mathcal{O}(n^d \cdot \log n)$ si $c = b^d$
 - $\mathcal{O}(n^{\log_b c})$ si $c > b^d$

6. Force brute

Approche

- ▶ *Exhaustif*: essayer toutes les sol. ou candidats récursivement
- ▶ *Explosion combinatoire*: souvent $\# \text{ solutions} \geq b^n, n!, n^n$
- ▶ *Avantage*: simple, algo. de test, parfois seule option
- ▶ *Désavantage*: généralement très lent et/ou avare en mémoire

Techniques pour surmonter explosion

- ▶ *Élagage*: ne pas développer branches inutiles
- ▶ *Contraintes*: élaguer si contraintes enfreintes
- ▶ *Bornes*: élaguer si impossible de faire mieux
- ▶ *Approximations*: débiter avec approx. comme meilleure sol.
- ▶ *Si tout échoue*: solveurs SAT ou d'optimisation

Problème des n dames

- ▶ *But*: placer n dames sur échiquier sans attaques
- ▶ *Algo.*: placer une dame par ligne en essayant colonnes dispo.

Sac à dos

- ▶ *But*: maximiser valeur sans excéder capacité
- ▶ *Algo.*: essayer sans et avec chaque objet
- ▶ *Mieux*: élaguer dès qu'il y a excès de capacité
- ▶ *Mieux++*: élaguer si aucune amélioration avec somme valeurs

Retour de monnaie

- ▶ *But*: rendre montant avec le moins de pièces
- ▶ *Algo.*: pour chaque pièce, essayer d'en prendre 0 à $\# \text{ max}$.

7. Programmation dynamique

Approche

- *Principe d'optimalité*: solution optimale obtenue en combinant solutions de sous-problèmes qui se chevauchent
- *Descendante*: algo. récursif + mémoïsation (ex. Fibonacci)
- *Ascendante*: remplir tableau itér. avec solutions sous-prob.

Retour de monnaie

- *Sous-question*: # pièces pour rendre j avec pièces 1 à i ?
- *Identité*: $T[i, j] = \min(T[i-1, j], T[i, j-s[i]] + 1)$
- *Exemple*: montant $m = 10$ et pièces $s = [1, 5, 7]$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	1	2	3	4	1	2	3	4	5	2
3	0	1	2	3	4	1	2	1	2	3	2

Sac à dos

- *Sous-question*: val. max. avec capacité j et les objets 1 à i ?
- *Identité*: $T[i, j] = \max(T[i-1, j], T[i-1, j-p[i]] + v[i])$

Plus courts chemins

- *Plus court chemin*: chemin simple de poids minimal
- *Bien défini*: si aucun cycle négatif
- *Approche générale*: raffiner distances partielles itérativement
- *Dijkstra*: raffiner en marquant sommet avec dist. min.
- *Floyd-Warshall*: raffiner via sommet intermédiaire v_k
- *Bellman-Ford*: raffiner avec $\geq 1, 2, \dots, |V| - 1$ arêtes
- *Sommaire*:

	Dijkstra	Bellman-Ford	Floyd-Warshall
Types de chemins	d'un sommet vers les autres		paires de sommets
Poids négatifs?	✗	✓	✓
Temps d'exécution	$\mathcal{O}(V \log V + E)$	$\Theta(V \cdot E)$	$\Theta(V ^3)$
Temps ($ E \in \Theta(1)$)	$\mathcal{O}(V \log V)$	$\Theta(V)$	$\Theta(V ^3)$
Temps ($ E \in \Theta(V)$)	$\mathcal{O}(V \log V)$	$\Theta(V ^2)$	$\Theta(V ^3)$
Temps ($ E \in \Theta(V ^2)$)	$\mathcal{O}(V ^2)$	$\Theta(V ^3)$	$\Theta(V ^3)$

8. Algorithmes et analyse probabilistes

Modèle probabiliste

- *Modèle*: on peut tirer à pile ou face (non déterministe)
- *Aléa*: on peut obtenir une loi uniforme avec une pièce
- *Idéalisé*: on suppose avoir accès à une source d'aléa parfaite (en pratique: source plutôt pseudo-aléatoire)

Algorithmes de Las Vegas

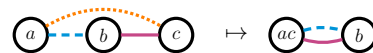
- *Temps*: varie selon les choix probabilistes
- *Valeur de retour*: toujours correcte
- *Exemple*: tri rapide avec pivot aléatoire
- *Temps espéré*: dépend de $\mathbb{E}[Y_x]$ où $Y_x = \#$ opér. sur entrée x

Algorithmes de Monte Carlo

- *Temps*: ne varie *pas* selon les choix probabilistes
- *Valeur de retour*: pas toujours correcte
- *Exemple*: algorithme de Karger
- *Prob. d'erreur*: dépend de $\Pr(Y_x \neq \text{bonne sortie sur } x)$

Coupe minimum: algorithme de Karger

- *Coupe*: partition (X, Y) des sommets d'un graphe non dirigé
- *Taille*: $\#$ d'arêtes qui traversent X et Y
- *Coupe min.*: identifier la taille minimale d'une coupe
- *Algorithme*: contracter itérativement une arête aléatoire en gardant les multi-arêtes, mais pas les boucles



- *Prob. d'erreur*: $\leq 1 - 1/|V|^2$ (Monte Carlo)
- *Amplification*: on peut réduire (augmenter) la prob. d'erreur (de succès) arbitrairement (en général: avec min., maj., etc.)

Temps moyen

- *Temps moyen*: $\sum$ temps instances de taille n / $\#$ instances
- *Attention*: pas la même chose que le temps espéré
- *Hypothèse*: entrées distribuées uniformément ($\pm$ réaliste)
- *Exemple*: $\Theta(n^2)$ pour le tri par insertion