1. Systèmes de numération

Système unaire

- Chaque nombre $n \in \mathbb{N}$ se représente par $\overbrace{1 \cdots 11}^{n \text{ fois}}$
- L'addition correspond à la concaténation
- Pas concis

Représentation positionnelle

- Généralisation du système décimal à une base $b \in \mathbb{N}_{\geq 2}$
- *Systèmes particuliers*: binaire ($b = 2$), octal ($b = 8$), décimal ($b = 10$), hexadécimal ($b = 16$)
- *Chiffres*: éléments de $\{0, 1, \ldots, b-1\}$
- *Chiffres au-delà de 9*: $\mathrm{A} = 10, \mathrm{B} = 11, \ldots, \mathrm{F} = 15, \ldots$
- *Valeur de x en base b*: $x_b = x_{n-1} \cdot b^{n-1} + \ldots + x_1 \cdot b^1 + x_0 \cdot b^0$
- *Exemple*: $8\mathrm{B}5_{16} = 8 \cdot 16^2 + 11 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0$
- Les zéros tout à gauche ne changent rien: $(0 \cdots 0x)_b = x_b$

Conversions

- *b à 10*: $x_0 + b \cdot (x_1 + b \cdot (x_2 + b \cdot (\ldots + b \cdot x_{n-1})))$
- *10 à b*: diviser à répétition par b et concaténer les restes de droite à gauche, par ex. $6_2 = 110$:
  $6 \div 2 = 3$ reste 0, $3 \div 2 = 1$ reste 1, $1 \div 2 = 0$ reste 1
- *b à b^m*: remplacer chaque bloc de taille m par sa valeur en base b^m, par ex. si $b^m = 2^3$: $10110 \to 26$
- *b^m à b*: éclater chaque symbole vers sa représentation de taille m en base b, par ex. si $b^m = 2^3$: $73 \to 111011$

Addition

- Se fait comme en base 10: additionner chiffre à chiffre en base b et propager une retenue vers la gauche

Fractions

- *Exemple*: $(11{,}01)_2 = 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = 3{,}25$
- *Chiffres non significatifs*: $(0 \cdots 0x{,}y0 \cdots 0)_b = (x{,}y)_b$

2. Architecture des ordinateurs

Architecture et organisation

- *Architecture*: spécification des services des composants
- *Organisation*: description physique des composants

Architecture de von Neumann

- *Mémoire principale*: stocke les programmes et leurs données
- *Processeur*: unité centrale de traitement de l'ordinateur
- *Unités d'entrée/sortie*: contrôlent les périphériques
- *Bus*: systèmes de communication entre les composants

Mémoire principale

- Suite de cellules d'octets identifiées par des *adresses* uniques
- Une adresse peut référer à: 1 *octet* (8 bits), 2 octets (*demi-mot*), 4 octets (*mot*), 8 octets (*double mot*)
- Quantité de mémoire utilisable limitée par taille des adresses
- *Big-endian*: `[00, 58, 40, 0F]` vaut `0058400F`
  Little-endian: `[00, 58, 40, 0F]` vaut `0F405800`
- *Alignement*: adresser 2^k octets à une adresse qui n'est pas un multiple de 2^k — parfois: *interdit*, souvent: *ralentit l'accès*

Processeur

- *Jeu d'instructions* élémentaires, par ex: `add` (code d'opér.) `x10, x11, x12` (opérandes)
- *Registres*: cellules de mémoire interne, très rapide d'accès
- *Code machine*: traduction des instructions en suite de bits
- *Compteur d'instruction*: pointe vers prochaine instruction
- *Unité de contrôle*: coordonne l'exécution des instructions
- *Unité arithmétique et logique*: calculs sur $\mathbb{Z}$ et chaînes de bits
- *Pipeline*: parallélisation des étapes d'exécution
- *RISC*: instructions simples, taille fixe, mémoire–*ou*–autre

3. Programmation en langage d'assemblage: ARMv8

Registres

- *Registres:* x_0–x_{30} (64 bits) ou w_0–w_{30} (sous-registres 32 bits)
- *Usage libre:* x_0–x_7 (arguments) et x_{19}–x_{28} (sauveg. par l'appelé)
- *Usage semi-libre:* x_9–x_{15} (sauvegardés par l'appelant)

Organisation du code

- *Ligne*: `etiquette:  opcode  operandes  // Commentaire`
- *Étiquette*: nom symbolique d'une ligne de code
- *Exemple*:

```
impair:
        mov     x20, 3          // tmp = 3
        mul     x20, x20, x19   // tmp = tmp * n
        add     x19, x20, 1     // n   = tmp + 1
```

Quelques instructions

`mov xd, v`	$x_d \leftarrow v$ où v est regis. ou const.
`add xd, xn, v`	$x_d \leftarrow x_n + v$ où v est regis. ou const.
`mul xd, xn, xm`	$x_d \leftarrow x_n \cdot x_m$
`udiv xd, xn, xm`	$x_d \leftarrow x_n \div x_m$

Données statiques

- *Adresse divisible par k:* `.align k`
- *Alloue k octets consécutifs:* `.skip k`
- *1, 2, 4, 8 octets:* `.byte v`, `.hword v`, `.word v`, `.xword v`
- *Chaîne de car.:* `.asciz s`

Segments de données

- *Instructions:* `.section ".text"`
- *Données en lecture seule:* `.section ".rodata"`
- *Données initialisées:* `.section ".data"`
- *Données non-initialisées:* `.section ".bss"`

Entrée/sortie (de haut niveau via C)

- *Affichage*: `printf(&format, val1, val2, ...)`
- *Lecture*: `scanf(&format, &var1, &var2, ...)`
- *Format nombres*: `int32` (`%d`), `uint32` (`%u`), `uint32-hex` (`%X`), 64 bits via préfixe `l`, par ex. `int64` (`%ld`)

Adresses

- *Numérique*: entier non négatif, souvent en hexadécimal
- *Symbolique*: chaîne représentant une adresse à déterminer

Modes d'adressage

- *Mode*: méthode pour récupérer la valeur d'un opérande
- *Récapitulatif des modes*:

Nom	*Valeur récupérée*	*Exemple*
immédiat	$i \mapsto i$	`mov x0, 42`
direct	$a \mapsto \text{mem}[a]$	—
par registre	$n \mapsto \text{reg}[n]$	`mov x0, x1`
indirect	$a \mapsto \text{mem}[\text{mem}[a]]$	—
indirect par registre	$n \mapsto \text{mem}[\text{reg}[n]]$	`ldr x0, [x1]`
indir. par reg. indexé	$n, i \mapsto \text{mem}[\text{reg}[n] + i]$	`ldr x0, [x1, i]`
indir. par reg. indexé pré-incrémenté	$\text{reg}[n] \leftarrow \text{reg}[n] + i$, suivi de $n, i \mapsto \text{mem}[\text{reg}[n]]$	`ldr x0, [x1, i]!`
indir. par reg. indexé post-incrémenté	$n, i \mapsto \text{mem}[\text{reg}[n]]$, suivi de $\text{reg}[n] \leftarrow \text{reg}[n] + i$	`ldr x0, [x1], i`
relatif	$i \mapsto \text{mem}[\text{reg}[pc] + i]$	`ldr x0, var`

Accès mémoire sur ARMv8

- *Chargement et stockage*:

# octets	*chargement*	*stockage*
1	`ldrb wd, a`	`strb wd, a`
2	`ldrh wd, a`	`strh wd, a`
4	`ldr wd, a`	`str wd, a`
8	`ldr xd, a`	`str xd, a`

- *Autres instructions*:

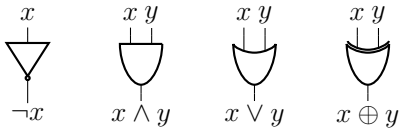
```
adr r, etiq   // charge adr(etiq) dans reg. r
mov r, s      // charge reg. s     dans reg. r
mov r, i      // charge valeur i   dans reg. r
```

Assemblage

- *Assembleur*: instructions → code machine; la plupart des adresses symboliques → adresses numériques
- *Éditeur de liens*: fichiers objets → fichier exécutable; recalcule certaines adresses; adresses symboliques → numériques

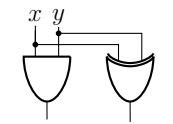
Circuits

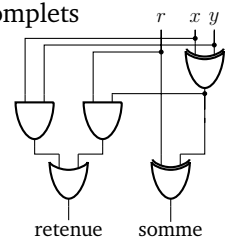
- « Blocs » de base constitués de portes logiques qui permettent d'implémenter l'ordinateur:



Arithmétique

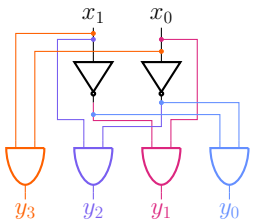
- *Demi-additionneur*: somme de deux bits
- *Additionneur complet*: somme de deux bits et d'une retenue
- *Addition*: somme sur n bits avec un demi-additionneur et une cascade de $n-1$ additionneurs complets

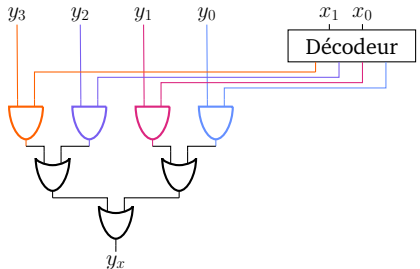




Décodage

- *Décodeur*: sur entrée x, sortie: $y_x = 1$ et $y_j = 0$ pour $j \neq x$
- *Multiplexeur*: sur entrée x, sélectionne le bit y_x
- *Instructions*: décodables/exécutables à l'aide de tels circuits

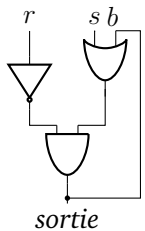




Mémoire

- *Circuits séquentiels*: peuvent mémoriser des bits
- *Verrou*: stocke un bit b,

  remise à 0 avec r, et mise à 1 avec s



6. Nombres entiers

Représentation des entiers signés

- *Compl. à 2*: $\text{val}(x_{n-1}\cdots x_1x_0) = -x_{n-1}\cdot 2^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} x_i \cdot 2^i$

bits	000	001	010	011	100	101	110	111
valeur	0	1	2	3	-4	-3	-2	-1

- *Représentables sur n bits*: $[-2^{n-1}, 2^{n-1}-1]$
- *Bit de signe*: négatif ssi bit de gauche $= 1$
- *Ajout de bits*: répéter bit de signe à gauche: $101 \to 1\cdots101$
- *Changement de signe*: $010 \xrightarrow{\text{complément}} 101 \xrightarrow{+1} 110$

Opérations arithmétiques

- *Addition*: comme les entiers non signés
- *Soustraction*: addition/changement de signe: $a - b = a + (-b)$
- *Report*: lors d'une retenue sur la somme des bits de poids fort
- *Débordement*: lorsque le résultat ne peut pas être représenté

- *Multiplication et division non signées*: comme en base 10:

$$\begin{array}{rr} & 101 \quad (5) \\ \times & 11 \quad (3) \\ \hline & 101 \\ + & 101 \\ \hline & 1111 \quad (15) \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & 10011 \;\big|\; 11 \\ - & 11 \quad\;\; 00110 \\ \hline & 111 \\ - & 11 \\ \hline & 1 \end{array}$$

- *Mult. signée*: étendre opérandes à $2n$ bits et garder $2n$ bits faibles du résultat (s'implémente sans extension explicite)
- *Division signée*: calculer $|a| \div |b|$ et ajuster signe

Codes de condition

- *Codes*: `N` (négatif), `Z` (zéro), `C` (report) [bit de retenue], `V` (débordement) [résultat trop grand/petit]
- *Codes modifiés par*: `cmp`, `adds`, `subs`, `negs`, `adcs`, `sbcs`
- *Comparaison*: codes mis à jour via soustraction bidon
- *Accès aux codes*: avec `b.condition etiq`
- *Accès au report*: « `adc rd, rn, rm` » $\equiv$ $r_d \leftarrow r_n + r_m + C$

7. Tableaux

Généralités

- *Tableau*: collection d'éléments identifiés par des indices
- *Éléments*: tous de même taille, contigus en mémoire
- *Indice*: d-uplet $\boldsymbol{i}$ où $d \geq 1$ est la dimension
- *Bornes*: $0 \leq \boldsymbol{i}_j < n_j$ pour chaque dimension j
- *Taille*: $n_0 \cdot n_1 \cdots n_{d-1}$ éléments
- *Types*: le type des éléments est implicite
- *Exemples de tableau 1D et tableau 2D*:

0	01010101
1	11110000
2	01101101
3	11111111
4	11110101

$n_0 = 5$
5 éléments

$(0,0)$	2
$(0,1)$	33
$(1,0)$	65535
$(1,1)$	73
$(2,0)$	9000
$(2,1)$	255

$n_0 = 3$, $n_1 = 2$
6 éléments

Calcul d'adresse

- *Index*: adresse relative à laquelle est stocké un élément
- *Calcul*: si a = adresse du tableau et k = nombre d'octets d'un élément, alors l'adresse d'un élément correspond à:

$$a + \underbrace{i \cdot k}_{\text{index élém. } i \text{ (tableau 1D)}} \qquad a + \underbrace{(i \cdot n_1 + j) \cdot k}_{\text{index élém. } (i,j) \text{ (tableau 2D)}}$$

Allocation/accès mémoire

- *Tableau non initialisé*:

```
.section ".bss"
        .align 2
tab:    .skip  3*2*2      // n0 * n1 * # octets
```

- *Tableau initialisé*:

```
.section ".data"
tab:    .hword  2, 33, 65535, 73, 9000, 255 // six demi-mots
```

- *Accès*: avec **`str`** / **`ldr`** (ou variantes) + modes d'adressage

8. Programmation structurée

Séquence

- Composition séquentielle d'instructions
- Une instruction de haut niveau peut nécessiter plusieurs instructions de bas niveau; par ex. `x19 *= 7` devient:

```
mov     x20, 7
mul     x19, x19, x20
```

Sélection

- Exécution conditionnelle d'instructions (`if`, `switch`, ...)
- *Implémentation*: branchements avant:

```
if (cond(xd, xn)) {
  // code si
}
else {
  // code sinon
}
```

```
si:
        cmp         xd, xn
        b.¬cond     sinon
        // code si
        b           fin
sinon:
        // code sinon
fin:
```

- *Conditions multiples*: obtenues avec plusieurs sélections

Itération

- Exécution répétée d'instructions (`while`, `do while`, `for`, ...)
- *Implémentation*: branchements arrière, et parfois avant:

```
while (cond(xd, xn)) {
  // code
}
```

```
boucle:
        cmp         xd, xn
        b.¬cond     fin
        // code
        b           boucle
fin:
```

Sous-programmes

- Permettent de modulariser le code en sous-routines
- Registres partagés par programme et sous-programmes
- *Arguments*: passés par valeur ou adresse dans x_0–x_7 (en ordre)
- *Appel*: « `bl sprog` » assigne $x_{30} \leftarrow pc + 4$ et branche à `sprog:`
- *Retour*: « `ret` » branche vers l'adresse de retour x_{30}
- *Sauvegarde*: l'appelé doit rétablir les registres x_{19} à x_{30}

9. Valeurs booléennes et chaînes de bits

Valeurs booléennes

- *Correspond à* un bit: $1 = vrai$, $0 = faux$
- *Représentation*: sur un octet, puisque bits non adressables

Opérateurs logiques

- *Opérations*: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\oplus$ « bit à bit » étendues aux chaînes:

`mvn x19, x20`

$\neg$	…	$\neg$	$\neg$	$\neg$
0	…	1	0	1
1	…	0	1	0

`and x19, x20, x21`

0	…	1	0	1
$\wedge$	…	$\wedge$	$\wedge$	$\wedge$
1	…	1	0	0
0	…	1	0	0

`orr x19, x20, x21`

0	…	1	0	1
$\vee$	…	$\vee$	$\vee$	$\vee$
1	…	1	0	0
1	…	1	0	1

`eor x19, x20, x21`

0	…	1	0	1
$\oplus$	…	$\oplus$	$\oplus$	$\oplus$
1	…	1	0	0
1	…	0	0	1

- *Échange de valeurs*: se fait sans registre temporaire avec `eor`

Décalages logiques et arithmétiques

- Décale les bits de j positions vers la gauche/droite:

11000101 —3 bits vers la gauche→ 00101000 `lsl xd, xn, 3`

11000101 —3 bits vers la droite→ 00011000 `lsr xd, xn, 3`

- Bit de signe copié lors d'un décalage arithmétique à droite:

11000101 —3 bits vers la droite→ 11111000 `asr xd, xn, 3`

- *Multiplication/division*: par 2^k correspond à un décalage de k bits vers la gauche/droite

Décalages circulaires

- Comme un décalage logique, mais les bits « perdus » sont réinsérés de l'autre côté:

11000101 —3 bits vers la gauche→ 00101110 n'existe pas sur ARMv8

11000101 —3 bits vers la droite→ 10111000 `ror xd, xn, 3`

Masquage

- Permet d'isoler certains bits à manipuler:

sélection	$r \wedge m$	met à 0 les bits de r non spécifiés par m
activation	$r \vee m$	met à 1 les bits de r spécifiés par m
désactivation	$r \wedge \neg m$	met à 0 les bits de r spécifiés par m
basculement	$r \oplus m$	inverse les bits de r spécifiés par m

10. Chaînes de caractères

Généralités

- *Caractère*: symbole représenté par une chaîne de bits
- *Chaîne de caractères*: suite finie de caractères, normalement terminée par un caractère nul

ASCII

- Représente 128 caractères codés sur 7 bits
- Lettre minuscule mise en majuscule en assignant le $6^{\text{ème}}$ bit de poids faible à 0, par ex. $a = 1100001_2$ et $A = 1000001_2$

ISO 8859-1 (Latin-1)

- Représente 256 caractères codés sur 8 bits
- Caractères 0 à 127: ASCII
- Caractères 128 à 255: lettres accentuées et autres caractères

UTF-8

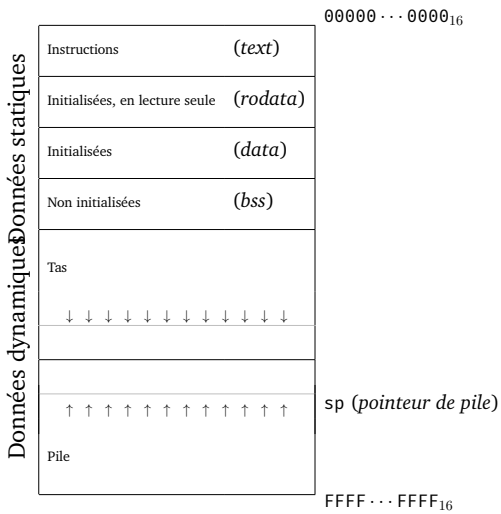
- Représente $> 1\ 000\ 000$ caractères sur 1 à 4 octets
- Caractères 0 à 127: ASCII
- Caractères 128 à 255: ISO 8859-1, mais codés différemment
- *Format général*:

# bits	*plage de codes*		*format binaire des octets*			
	Début	Fin	Octet 1	Octet 2	Octet 3	Octet 4
7	000000_{16}	$00007F_{16}$	0*******	—	—	—
11	000080_{16}	$0007FF_{16}$	110*****	10******	—	—
16	000800_{16}	$00FFFF_{16}$	1110****	10******	10******	—
21	010000_{16}	$10FFFF_{16}$	11110***	10******	10******	10******

- *Exemples*:

car.	code	codage
a	1100001_2	01100001_2
é	$000\ 11101001_2$	$11000011\ 10101001_2$
ケ	$00110000\ 10110001_2$	$11100011\ 10000010\ 10110001_2$
𐐷	$00001\ 00100100\ 00001101_2$	$11110000\ 10010010\ 10010000\ 10001101_2$

Disposition de la mémoire.



Tas.

- Contient les données allouées dynamiquement: structures de données, objets, etc.

Pile d'exécution.

- Stocke les données temporaires lors d'appel de sous-prog.
- Données empilées à l'appel et dépilées au retour
- *Pointeur de pile*: `sp` contient l'adresse du sommet de la pile
- *Empiler*: décrémenter `sp` + stocker avec `stp xd, xn, a`
- *Dépiler*: incrémenter `sp` + charger avec `ldp xd, xn, a`

Récursion.

- *Implémentée par*: appels de sous-prog. + usage de la pile
- *Récursion trop profonde*: erreur car la pile est bornée
- *Solution (partielle)*: empiler le moins de données possibles

12. Nombres en virgule flottante

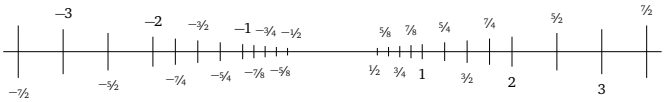
Représentation.

- *Nombre en virgule flottante:*

$$\overbrace{\pm}^{\text{signe}} \underbrace{d_0,d_1d_2\cdots d_{n-1}}_{\text{mantisse en base } \beta} \times \overbrace{\beta^{e}}^{\text{exposant}}$$

(base)

- *Normalisé*: si $d_0 \neq 0$
- Représente différents ordres de grandeur:



Arithmétique.

- *Addition:* (1) mettre exposants en commun; (2) additionner mantisses; (3) normaliser; (4) arrondir
- *Multiplication:* (1) additionner exposants; (2) multiplier mantisses; (3) normaliser; (4) arrondir

Précision.

- *Approximations de nombres réels:*

(a) arrondir (égalité: dernier chiffre pair): $1{,}9565 \to 1{,}956$

(b) troncation: $1{,}5416 \to 1{,}541$

- *Erreur relative*: $\text{err}(x) \overset{\text{déf}}{=} \frac{x-\overline{x}}{x}$ où $\overline{x}$ est l'approximation
- *Borne pour mode (a)*: $|\text{err}(x)| \leq \underbrace{(\beta/2)\cdot\beta^{-n}}_{\varepsilon \text{ machine}}$

Norme IEEE 754.

-

format	*signe*	*exposant*	*mantisse*
simple	1 bit	8 bits	23 bits (+1 bit caché)
double	1 bit	11 bits	52 bits (+1 bit caché)

- *Repr. avec biais:* $1000011011100\cdots0 = -1{,}11 \times 2^{13-127}$
- ±0 ($s0\cdots00\cdots0$); $\pm\infty$ ($s1\cdots10\cdots00$); NaN ($s1\cdots1\,e\,0\cdots01$)

ARMv8.

- *Registres*: $\mathtt{d_n}$ (64 bits) et $\mathtt{s_n}$ (32 bits)
- *Instructions*: `ldr`, `str`, `fmov`, `fcmp`, `fadd`, `fmul`, `fsqrt`, etc.

13. Introduction aux entrées/sorties : NES

Architecture.

- *Pas RISC*: possible de manipuler la mémoire directement
- *Processeurs:* proc. principal + proc. d'images (*PPU*)
- *Mémoire principale:* primaire + registres d'E/S + programme
- *Mémoire vidéo:* stocke les tuiles et palettes de couleurs

Jeu d'instructions.

- *Registres:* `a` (accumulateur), `x` (index), `y` (index), `s` (pile)
- *Valeurs imm.:* `#` (numérique), `$` (hexadécimal), `%` (binaire)
- *Accès mémoire:* `lda`, `ldx`, `ldy` (chargement d'octet); `sta`, `stx`, `sty` (stockage d'octet); `txa`, `tax`, `tya`, etc. (copie)
- *Arithmétique:* `adc` (addition avec report); `sbc` (soustraction avec emprunt); `inc`, `inx`, `iny`, `dec` (inc/décrémentation)
- *Logique:* `asl` (<< 1), `lsr` (>> 1), `and` ($\wedge$), `ora` ($\vee$), `eor` ($\oplus$)
- *Contrôle:* `cmp`, `cpx`, `cpy` (comparaison); `beq`, `bne` (branch. conditionnel), `jmp` (branch. incond.), `jsr`/`rts` (sous-prog.)

Tuiles.

- *Images:* constituées de tuiles de 8×8 pixels
- *Tuiles:* stockées dans la cartouche, transférées vers le PPU
- *Tuile:* spécifiée par 4 octets (y, i, a, x): position verticale y, numéro de tuile i, attributs a, position horizontale x
- *Attributs:* 8 bits pour réflexions, profondeur et couleurs

Sorties (graphiques).

- L'affichage se fait lors du rafraîchissement vertical
- *Sortie:* stocker tuiles de $0\texttt{X}00_{16}$ à $0\texttt{X}\text{FF}_{16}$ en mém. principale
- *Affichage:* transférer au PPU en écrivant `#$0X` à `$4014`

Entrées (manettes).

- *Entrée:* protocole de communication via port de manettes
- *Demande de lecture:* envoyer `#1`, puis `#0`, via `$4016`
- *Lecture:* lire bit de poids faible à `$4016` pour chaque bouton

14. Entrées/sorties

Mécanismes d'entrée/sortie.

- *Attente active:* interrogation continue d'un registre d'état jusqu'à un événement (ex. *VBLANK*)
- *Interruption:* signal lancé vers le processeur lors d'un événement (ex. NMI, RESET, IRQ)

Interruptions.

- *Gestionnaire:* sous-routine qui traite une interruption
- *Table d'interruptions:* contient l'adresse des gestionnaires
- *Traitement:* sauvegarder l'état du processeur; appeler le gestionnaire; restaurer l'état
- *Priorité:* valeur numérique assignée à une interruption
- *Gestion des priorités:* interruption ignorée si une interruption de priorité $>$ est en cours; gestionnaire en exécution mis en attente si une interruption de priorité $\geq$ est lancée
- *Non masquable:* top priorité, ne peut pas ignorer (ex. RESET)

Accès direct à la mémoire (DMA).

- *DMA:* permet au processeur d'initier un accès mémoire et de laisser un contrôleur effectuer le transfert de données
- *Sur le NES:* envoi des tuiles `mem[0x0200, 0x02FF]` vers la mémoire de *sprites* via DMA:

```
lda #$02
sta $4014
```

Appels système.

- *Accès E/S:* empêché par le système d'exploitation (sécurité)
- *Appel système:* service offert par le noyau du système d'exploitation; appelé via une interruption logicielle
- *Exemples UNIX + ARMv8:*

code	appel système
64	`write(flux, chaine, #octets)`
63	`read(flux, tampon, #octets)`

Flux d'entrée standard = 0
Flux de sortie standard = 1

```
// Afficher chaine
mov  x8, 64
mov  x0, 1
adr  x1, chaine
mov  x2, 10
svc  0
```